SABER SUFICIENTE NO ES SUFICIENTE: UN ESTUDIO DE LOS COMPORTAMIENTOS METACOGNITIVOS AL RESOLVER PROBLEMAS DE DEMOSTRACIÓN CON EL APOYO DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA

JEISON CAMILO SUA FLÓREZ

DIRECTOR
JAIME IBÁÑEZ IBÁÑEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
MAESTRÍA EN TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN APLICADAS A LA EDUCACIÓN
-MTIAE-

BOGOTÁ, COLOMBIA
2017

SABER SUFICIENTE NO ES SUFICIENTE: UN ESTUDIO DE LOS COMPORTAMIENTOS METACOGNITIVOS AL RESOLVER PROBLEMAS DE DEMOSTRACIÓN CON EL APOYO DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA

JEISON CAMILO SUA FLÓREZ

PROYECTO PRESENTADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN APLICADAS A LA EDUCACIÓN

DIRECTOR
JAIME IBÁÑEZ IBÁÑEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
MAESTRÍA EN TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN APLICADAS A LA EDUCACIÓN
-MTIAE-

BOGOTÁ, COLOMBIA
2017

Derechos de autor

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

1. Información General	
Tipo de documento	**Tesis de grado**
Acceso al documento	**Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central**
Título del documento	**Saber suficiente no es suficiente: un estudio de los comportamientos metacognitivos al resolver problemas de demostración con el apoyo de la geometría dinámica**
Autor(es)	**Sua Flórez, Jeison Camilo**
Director	**Jaime Ibáñez Ibáñez**
Publicación	**Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2017. 323 p.**
Unidad Patrocinante	**Universidad Pedagógica Nacional**
Palabras Claves	**METACOGNICIÓN, RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, GEOMETRÍA DINÁMICA, PROBLEMAS DE DEMOSTRACIÓN.**

2. Descripción
Los problemas de demostración, vistos como una instancia de la resolución de problemas, demandan en el individuo que los afronta que ponga en juego distintos conocimientos y habilidades instrumentales cuando cuenta con el apoyo de la geometría dinámica. Sin embargo, como se muestra en esta investigación, el conjunto de conocimientos con los que un individuo cuenta y su grado de instrumentalización del software no se convierten en los únicos aspectos relevantes en el marco del proceso de resolución. Aspectos metacognitivos como el control, la regulación y la evaluación de las acciones ejecutadas pueden llevar a que un problema de demostración sea resuelto pertinentemente, aun cuando no se cuente con un gran repertorio teórico o que, inclusive, aun cuando se cuente con los conocimientos pertinentes y necesarios, el resultado obtenido o proceso de resolución no sea afortunado. Apoyados en dos grupos con un nivel de formación matemática distinta, mostramos que la metacognición se convierte en un aspecto que puede llevar a un grupo, con un conocimiento matemático reducido, a obtener mejores resultados que un grupo que cuenta con un conocimiento profundo de la disciplina.

3. Fuentes
El trabajo de grado involucró un total de 104 referencias bibliográficas. A continuación se listan:
Abdelfatah, H. (2011). A story-based dynamic geometry approach to improve attitudes toward geometry and

geometric proof. ZDM - International Journal on Mathematics Education, 43(3), 441–450. http://doi.org/10.1007/s11858-011-0341-6
Anderson, J. R., Lee, H. S., & Fincham, J. M. (2014). Discovering the structure of mathematical problem solving. Proceedings of the 6th International Conference on Educational Data Mining, 97(1976), 163–177. http://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2014.04.031
Artzt, A. F., & Armour-Thomas, E. (1992). Development of a Cognitive-Metacognitive Framework for Protocol Analysis of Mathematical Problem Solving in Small Groups. Cognition and Instruction, 9(2), 137–175.
Aydın, U., & Ubuz, B. (2010). Structural model of metacognition and knowledge of geometry. Learning & Individual Differences, 20(5), 436–445. http://doi.org/10.1016/j.lindif.2010.06.002
Barrera-Mora, F., & Reyes-Rodríguez, A. (2013). Cognitive processes developed by students when solving mathematical problems within technological environments Barrera-Mora & Reyes-Rodríguez. The Mathematics Enthusiast, 10(1), 109–136.
Baxter, P., & Jack, S. (2008). Qualitative case study methodology: Study design and implementation for novice researchers. The Qualitative Report, 13(4), 544–599. http://doi.org/citeulike-article-id:6670384
Bayat, S., & Tarmizi, R. (2010). Assessing Cognitive and Metacognitive Strategies during Algebra Problem Solving Among University Students. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 8(5), 403–410. http://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.056
Bjuland, R. (2007). Adult Students' Reasoning in Geometry: Teaching Mathematics through Collaborative Problem Solving in Teacher Education. The Montana Mathematics Enthusiast, 4(1), 1–30.
Cai, J. (1994). A protocol-analytic study of metacognition in mathematical problem solving. Mathematics Education Research Journal, 6(2), 166–183. http://doi.org/10.1007/BF03217270
Callahan, L., & Garofalo, J. (1987). Metacognition and School Mathematics. The Arithmetic Teacher, 34(9), 22–23.
Camargo, L., Samper, C., & Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. Lecturas Matemáticas Volumen Especial, 371–383.
Carlson, M. P., & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. Educational Studies in Mathematics, 58(1), 45–75. http://doi.org/10.1007/s10649-005-0808-x
Chen, C., & Chiu, C. (2015). Collaboration Scripts for Enhancing Metacognitive Self-regulation and Mathematics Literacy. International Journal of Science and Mathematics Education, 1–18. http://doi.org/10.1007/s10763-015-9681-y
Chinnappan, M. (1998). Schemas and mental models in geometry problem solving. Educational Studies in Mathematics, (36), 201–217.
Chinnappan, M., & Lawson, M. (1996). The effects of training in the use of executive strategies in geometry problem solving. Learning and Instruction, 6(1), 1–17.
Chiu, M. M., Jones, K. A., & Jones, J. L. (2013). Building on Schoenfeld's Studies of Metacognitive Control Towards Social Metacognitive Control. In Y. Li & J. Moschkovich (Eds.), Proficiency and Beliefs in Learning and Teaching Mathematics (pp. 69–85). SensePublishers. http://doi.org/10.1007/978-94-6209-299-0_6
Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. In 28 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 339–352). http://doi.org/10.1007/s10763-004-6785-1
Cox, M. T. (2005). Metacognition in computation: A selected research review. Artificial Intelligence, 169(2), 104–141. http://doi.org/10.1016/j.artint.2005.10.009
De Villiers, M. (2010). Experimentation and proof in mathematics. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives (pp. 205–221). Springer US. http://doi.org/10.1007/978-1-4419-0576-5_14
Dettori, G., Greco, S., & Lemut, E. (1998). Information Technology and problem solving in mathematics education. In G. Marshall & M. Ruohonen (Eds.), Capacity Building for IT in Education in Developing Countries (pp. 299–307). London: Chapman & Hall. http://doi.org/10.1007/978-0-387-35195-7_32
Dindyal, J. (2014). International Comparative Studies in Mathematics: An Overview. In Encyclopedia of Mathematics Education (Stephen Le, pp. 320–325). Springer Netherlands. http://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_83
Dinnel, D., Glover, J., & Ronning, R. (1984). A provisional model of mathematical problem solving. Bulletin of

the Psychonomic Society, 22(5), 459–462.
Duffield, J. a. (1991). Designing computer software for problem-solving instruction. Educational Technology Research and Development, 39(1), 50–62. http://doi.org/10.1007/BF02298106
Eisenhardt, K. (1989). Building Theories from Case Study Research. The Academy of Management Review, 14(4), 532–550. http://doi.org/10.5465/AMR.1989.4308385
Erbas, A. K., & Okur, S. (2012). Researching students' strategies, episodes, and metacognitions in mathematical problem solving. Quality and Quantity, 46(1), 89–102. http://doi.org/10.1007/s11135-010-9329-5
Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. American Psychologist, 34(10), 906–911. http://doi.org/10.1037/0003-066X.34.10.906
Furinghetti, F., & Morselli, F. (2009). Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: Affective and cognitive factors in proving. Educational Studies in Mathematics, 70(1), 71–90. http://doi.org/10.1007/s10649-008-9134-4
Garofalo, J., & Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. Journal for Research in Mathematics Education. http://doi.org/10.2307/748391
Gawlick, T. (2002). On Dynamic Geometry Software in the regular classroom. Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik, 34(3), 85–92. http://doi.org/10.1007/BF02655711
Goos, M. (1994). Metacognitive decision making and social interactions during paired problem solving. Mathematics Education Research Journal, 6(2), 144–165. http://doi.org/10.1007/BF03217269
Goos, M., & Galbraith, P. (1996). Do it this way! Metacognitive strategies in collaborative mathematical problem solving. Educational Studies in Mathematics, 30(3), 229–260. http://doi.org/10.1007/BF00304567
Gourgey, A. F. (1998). Metacognition in basic skills instruction. Instructional Science, 26(1–2), 81–96. http://doi.org/10.1023/A:1003092414893
Gourgey, A. F. (2001). Metacognition in basic skills instruction. In H. J. Hartman (Ed.), Metacognition in Learning and Instruction (pp. 17–32). Springer Netherlands. http://doi.org/10.1007/978-94-017-2243-8_2
Guven, B., Baki, A., & Cekmez, E. (2012). Using dynamic geometry software to develop problem solving skills. Mathematics & Computer Education, 46(1), 6–17.
Hanna, G. (2001). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. Educational Studies in Mathematics, 44(1/2), 5–23. http://doi.org/10.1023/A:1012737223465
Healy, L., & Hoyles, C. (2001). Software tools for geometrical problem solving: potentials and pitfalls. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6, 235–256.
Hollingworth, R., & Mcloughlin, C. (2005). Developing the metacognitive and problem- solving skills of science students in higher education. In C. McLoughlin & A. Taji (Eds.), Teaching in the sciences: Learner-centered approaches (pp. 63–83). New York: The Haworth Press Inc.
Hoyles, C., & Jones, K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century (pp. 121–128). Dordrecht: Kluwer. Retrieved from http://eprints.soton.ac.uk/41227/
Hurme, T., & Järvelä, S. (2005). Students' Activity in Computer-Supported Collaborative Problem Solving in Mathematics. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10(1), 49–73. http://doi.org/10.1007/s10758-005-4579-3
Iranzo, N., & Fortuny, J. M. (2011). Influence of Geogebra on Problem Solving Strategies. In L. Bu & R. Schoen (Eds.), Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra (pp. 91–103). SensePublishers. http://doi.org/10.1007/978-94-6091-618-2_7
Isohätälä, J., Järvenoja, H., & Järvelä, S. (2017). Socially shared regulation of learning and participation in social interaction in collaborative learning. International Journal of Educational Research, 81, 11–24. http://doi.org/10.1016/j.ijer.2016.10.006
Jurdak, M. (2000). Technology and problem solving in mathematics: Myths and Realities. In Proceedings of the International Conference on Technology in Mathematics Education (pp. 30–37). Beirut: Lebanese American University.
Karsli, T. (2015). Relation Among Meta-Cogntition Level , Decision Making , Problem Solving and Locus of Control in a Turkish Adolescent Population. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 205, 35–42. http://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.09.008
Kilpatrick, J. (1969). Problem Solving in Mathematics. Review of Educational Research, 39(4), 523–534. http://doi.org/10.3102/00346543039004523
Kim, Y., Park, M., Moore, T., & Varma, S. (2013). Multiple levels of metacognition and their elicitation through

complex problem-solving tasks. Journal of Mathematical Behavior, 32(3), 377–396. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.04.002
Koichu, B., Berman, A., & Moore, M. (2006). Patterns of Middle School Students' Heuristic Behaviors in Solving Seemingly Familiar Problems. In 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 457–464).
Koichu, B., & Leron, U. (2015). Proving as problem solving: The role of cognitive decoupling. The Journal of Mathematical Behavior, 40, 233–244. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.005
Koyuncu, I., Akyuz, D., & Cakiroglu, E. (2015). Investigating plane geometry problem-solving strategies of prospective mathematics teachers in technology and paper-and-pencil environments. International Journal of Science and Mathematics Education, 13(4), 837–862. http://doi.org/10.1007/s10763-014-9510-8
Kramarski, B., Mevarech, Z., & Arami, M. (2002). The effects of metacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks. Educational Studies in Mathematics, 49(2), 225–250.
Krummheuer, G. (1995). The Ethnography of Argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), The Emergence of Mathematical Meaning (pp. 229–270). New jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
Kuzle, A. (2011). Preservice teachers' patterns of metacognitive behavior during mathematics problem solving in a dynamic geometry environment. University of Georgia–Athens.
Kuzle, A. (2012). Investigating and Comunicating Technology Mathematics Problem Solving Experience of Two Preservice Teachers. Acta Didactica Napocensia, 5(1), 1–11.
Kuzle, A. (2013a). Patterns of metacognitive behavior during mathematics problem-solving in a dynamic geometry environment. International Electronic Journal of Mathematics Education, 8(1), 20–40.
Kuzle, A. (2013b). The interrelations of the cognitive and metacognitive factors with the affective factors during problem solving. In M. Pavlekovic, Z. Kolar-Begovic, & R. Kolar-Super (Eds.), Mathematics teaching for the future (pp. 250–260). Zagreb: Element.
Kuzle, A. (2015a). Nature of metacognition in a dynamic geometry enviroment. LUMAT, 3(5), 627–646.
Kuzle, A. (2015b). Problem solving as an instructional method: The use of open problems in technology problem solving instruction. LUMAT, 3(1), 69–86.
Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. Educational Studies in Mathematics, 44(1), 151–161.
Lárez, J. (2014). Las demostraciones geométricas como instancias de resolución de problemas. Paradigma, 35(2), 183–199.
Lesh, R. (2006). New Directions for Research on Mathematical Problem Solving. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (pp. 15–34).
Leung, A., & Lopez-Real, F. (2002). Theorem justification and acquisition in dynamic geometry: A case of proof by contradiction. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7(2), 145–165. http://doi.org/10.1023/A:1021195015288
Lin, X., & Sullivan, F. R. (2008). Computer contexts for supporting metacognitive learning. In J. Voogot & G. Knezek (Eds.), International handbook of information technology in primary and secondary education (pp. 281–298). Springer US. Retrieved from http://www.springerlink.com/index/k636l134641u1784.pdf
Maldonado, L. (2001). Análisis de protocolos: posibilidad metodológica para el estudio de procesos cognitivos. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
Mariotti, M. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. Educational Studies in Mathematics, 44(1–2), 25–53.
Mariotti, M. (2010). Proofs, semiotics and artefacts of information technologies. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives (pp. 169–188). Springer US. http://doi.org/10.1007/978-1-4419-0576-5_12
Marrades, R., & Gutiérrez, Á. (2001). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. Educational Studies in Mathematics, 44(1), 87–125. http://doi.org/10.1023/A:1012785106627
Mayer, R. E. (1998). Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving. Instructional Science, 26(1–2), 49–63. http://doi.org/10.1023/A:1003088013286
Mevarech, Z., & Fridkin, S. (2006). The effects of IMPROVE on mathematical knowledge, mathematical reasoning and meta-cognition. Metacognition Learning, 1(1), 85–97. http://doi.org/10.1007/s11409-006-6584-x
Moreno, L. E., & Santillán, M. A. (2004). Variation, variables and Semiotic Mediation in a Dynamical

Environment. In D. E. McDougall & J. A. Ross (Eds.), Proceedings XXII- PME-NA (pp. 223–228). Toronto.
Nunokawa, K. (2010). Proof, Mathematical Problem-Solving, and Explanation in Mathematics Teaching. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives (pp. 223–236). Springer US. http://doi.org/10.1007/978-1-4419-0576-5_15
Oner, D. (2013). Analyzing group coordination when solving geometry problems with dynamic geometry software. International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning, 8(1), 13–39. http://doi.org/10.1007/s11412-012-9161-0
Özen, D., & Köse, N. Y. (2013). Investigating Pre-service Mathematics Teachers' Geometric Problem Solving Process in Dynamic Geometry Environment. Turkish Online Journal of Qualitative Inquiry, 4(3), 61–74.
Panaoura, A. (2012). Improving problem solving ability in mathematics by using a mathematical model: A computerized approach. Computers in Human Behavior, 28(6), 2291–2297. http://doi.org/10.1016/j.chb.2012.06.036
Papleontiou-louca, E. (2003). The concept and instruction of metacognition. Teacher Development, 7(1), 9–30. http://doi.org/10.1080/13664530300200184
Perry, P., Samper, C., Camargo, L., & Molina, O. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. In Geometría Plana: un espacio de aprendizaje (pp. 11–34). Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.
Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2009). Cognitive styles, dynamic geometry and measurement performance. Educational Studies in Mathematics, 70(1), 5–26. http://doi.org/10.1007/s10649-008-9139-z
Pochulu, M. (2010). Significados atribuidos a la resolución de problemas con software de geometría dinámica durante un desarrollo profesional docente. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 13(3), 307–336.
Psycharis, S., Botsari, E., Mantas, P., & Loukeris, D. (2014). The impact of the computational inquiry based experiment on metacognitive experiences, modelling indicators and learning performance. Computers and Education, 72, 90–99. http://doi.org/10.1016/j.compedu.2013.10.001
Raes, A., Schellens, T., Wever, B. De, & Benoit, D. F. (2016). Promoting metacognitive regulation through collaborative problem solving on the web: When scripting does not work. Computers in Human Behavior, 58, 325–342. http://doi.org/10.1016/j.chb.2015.12.064
Räisänen, M., Postareff, L., & Lindblom-Ylänne, S. (2016). University students' self- and co-regulation of learning and processes of understanding: A person-oriented approach. Learning and Individual Differences, 47, 281–288. http://doi.org/10.1016/j.lindif.2016.01.006
Sanabria, L. B. (2014). Análisis de protocolos: una alternativa para investigar en ambientes de aprendizaje digital. In Á. Camargo (Ed.), Educación y Tecnologías de la Información y la Comunicación (p. 119,134). Bogotá.
Sánchez, E., Sacristán, A. I., & Mercado, M. (2004). Improving the Formulation Component of Proofs Using a Network Chat Environment in Dynamic Geometry Activities. In Annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. Balacheff). Toronto: Jones.
Sandoval, I. T., & Moreno, L. E. (2012). Tecnología digital y cognición matemática: retos para la educación. Horizontes Pedagógicos, 14(1), 21–29.
Santos-Trigo, M. (2007). Mathematical problem solving: An evolving research and practice domain. ZDM - International Journal on Mathematics Education, 39(5–6), 523–536. http://doi.org/10.1007/s11858-007-0057-9
Santos-Trigo, M., & Cristóbal-Escalante, C. (2008). Emerging High School Students' Problem Solving Trajectories Based on the Use of Dynamic Software. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 27(3), 325–340.
Schneider, W. (2010). The Development of Metacognitive Competencies. In B. Glatzeder, V. Goel, & A. Müller (Eds.), Towards a Theory of Thinking (pp. 203–214). Springer Berlin Heidelberg. http://doi.org/10.1007/978-3-642-03129-8
Schneider, W., & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. ZDM - International Journal on Mathematics Education, 42(2), 149–161. http://doi.org/10.1007/s11858-010-0240-2
Schoenfeld, A. (1981). Episodes and Executive Decisions in Mathematical Problem Solving. In Annual Meeting of the American Educational Research Association (p. 73). Los Angeles.
Schoenfeld, A. (1985). Making sense of "out loud" problem-solving protocols. The Journal of Mathematical

Behavior, 4, 171–191. Retrieved from http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=psyh&AN=1986-28488-001&site=eds-live
Schoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-Making in Mathematics. In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334–370). New York: MacMillan.
Schraw, G., & Moshman, D. (1995). Metacognitive theories. Educational Psychology Review, 7(4), 351–371. http://doi.org/10.1007/BF02212307
Selden, A., & Selden, J. (2013). Proof and problem solving at university level. The Mathematics Enthusiast, 10(1), 303–334. Retrieved from http://scholarworks.umt.edu/tme/vol10/iss1/14
Silver, J. (1998). Can computers be used to teach proofs? The Mathematics Teacher, 91(8), 660–663.
Smith, R. C., Hollebrands, K. F., Iwancio, K., & Kogan, I. (2007). College Geometry Students' Uses of Technology in the Process of Constructing Arguments. In Annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Nevada.
Stillman, G. (2011). Applying Metacognitive Knowledge and Strategies in Applications and Modelling Tasks at Secondary Schoo. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo, & G. Stillman (Eds.), Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (Vol. 1, pp. 165–180). Springer Netherlands. http://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2
Stillman, G. (2014). Metacognition. In S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 445–447). London: Springer International Publishing. http://doi.org/10.1007/ 978-94-007-4978-8
Stillman, G., & Mevarech, Z. (2010). Metacognition research in mathematics education: From hot topic to mature field. ZDM - International Journal on Mathematics Education, 42(2), 145–148. http://doi.org/10.1007/s11858-010-0245-x
Valencia, N., Sanabria, L., & Ibáñez, J. (2012). Procesos cognitivos y metacognitivos en la solución de problemas de movimiento de figuras en el plano a través de ambientes computacionales. Tecné, Episteme Y Didaxis, 31(1), 45–65.
Veenman, M. V. J., Van Hout-Wolters, B. H. A. M., & Afflerbach, P. (2006). Metacognition and learning: Conceptual and methodological considerations. Metacognition and Learning, 1(1), 3–14. http://doi.org/10.1007/s11409-006-6893-0
Vincent, J. (2002). Dynamic Geometry Software and Mechanical Linkages. In D. Watson & J. Andersen (Eds.), Networking the Learner SE - 42 (pp. 423–432). Springer US. http://doi.org/10.1007/978-0-387-35596-2_42
Volet, S., Summers, M., & Thurman, J. (2009). High-level co-regulation in collaborative learning: How does it emerge and how is it sustained? Learning and Instruction, 19(2), 128–143. http://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2008.03.001
Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. Journal of Mathematical Behavior, 24(3–4), 351–360. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.005
Yimer, A., & Ellerton, N. F. (2006). Cognitive and metacognitive aspects of mathematical problem solving: An emerging model. Identities, Cultures, and Learning Spaces, (1994), 575–582.
Zheng, L., & Huang, R. (2016). The effects of sentiments and co-regulation on group performance in computer supported collaborative learning. The Internet and Higher Education, 28, 59–67. http://doi.org/10.1016/j.iheduc.2015.10.001
Zheng, L., & Yu, J. (2016). Exploring the behavioral patterns of Co-regulation in mobile computer-supported collaborative learning. Smart Learning Environments, 3(1), 1. http://doi.org/10.1186/s40561-016-0024-4

4. Contenidos

El documento está estructurado en nueve capítulos, de los cuales el primero es la introducción, donde se presenta el cuerpo del documento en términos generales. El segundo presenta una justificación del estudio realizado, mostrando de manera panorámica el contexto en el que la investigación se sitúa, la pregunta de investigación y los objetivos propuestos. En el tercer capítulo se presenta un estado del arte sobre la resolución de problemas y la metacognición, en este capítulo se busca reconocer la relación simbiótica entre estos dos elementos teóricos, así como reconocer la presencia de ambos en la demostración en geometría. En el cuarto capítulo se presentan los elementos teóricos que fundamentan la investigación, los cuales ya se mencionaron en el primer párrafo. El quinto capítulo desarrolla los aspectos metodológicos considerados para el desarrollo de la investigación, en este se exponen los fundamentos de la metodología del análisis de protocolos, la revisión literaria con la que se fundamentó el estudio, el contexto de la población involucrada y la naturaleza de los problemas considerados.

El sexto capítulo presenta la transcripción y análisis de los protocolos de resolución obtenidos en cada uno de los problemas, identificando los episodios presentes en cada protocolo. En el séptimo capítulo se realiza un análisis al interior de cada grupo en el que se presentan las actuaciones de cada uno en función de los comportamientos metacognitivos representativos en cada episodio y la duración de cada uno de estos. En el octavo capítulo se realiza un análisis comparativo entre los dos grupos involucrados, en el que se discute sobre las estrategias adoptadas por cada uno y las diferencias y similitudes observadas en su trabajo. El capítulo final presenta las conclusiones de la investigación, estas responden a los objetivos planteados y a la pregunta que movilizó el estudio. Adicionalmente, se presentan en este último capítulo algunas proyecciones investigativas.

5. Metodología

Para desarrollar este estudio se adoptaron cuatro elementos dentro del marco teórico: la resolución de problemas, la demostración en geometría, los programas de geometría dinámica y la metacognición. A través del primer elemento del marco teórico se caracterizan los problemas de demostración y los episodios de la resolución de problemas. El segundo elemento del marco teórico permite reconocer algunas particularidades de la demostración matemática y su presencia en la geometría, además del favorecimiento de esta gracias a la geometría dinámica. El tercer elemento permite reconocer las bondades y dificultades de incorporar la geometría dinámica en el aula. El cuarto elemento del marco teórico permite caracterizar la metacognición en sus tres niveles: individual, social y ambiental.

De manera paralela, se acopiaron cuatro problemas reportados en la literatura que demandaban, en su solución, la formulación y justificación de una conjetura y que permiten exhibir comportamientos metacognitivos en el proceso de resolución. Posterior a ello, se desarrolló la implementación de los problemas considerados. Para el análisis de los resultados acopiados se involucró la metodología de análisis de protocolos (Maldonado, 2001; Sanabria, 2014), metodología que permite reconocer episodios de resolución y avanzar en el análisis de la información obtenida. Con base en el análisis realizado se establecieron resultados respecto a los comportamientos metacognitivos observados y su relación con el uso de la geometría dinámica, el nivel de formación de los estudiantes involucrados al momento de afrontar estas tareas y la naturaleza de los procesos de resolución observados.

6. Conclusiones
Las conclusiones derivadas del estudio se agrupan en cinco asuntos principalmente. En primer lugar, se presentan los comportamientos metacognitivos que tienen presencia en el proceso de resolucion de problemas de demostración cuando se involucra un trabajo colaborativo. En segundo lugar, se hace mención a la incidencia de la geometría dinámica en el proceso de resolución en términos de los comportamientos observados. En tercer lugar, se mencionan los aportes de la metacognición al proceso de la resolución, de acuerdo a lo evidenciado en esta investigación. En cuarto lugar, se caracteriza la naturaleza del proceso de resolucion de los problemas de demostración. Finalmente, se hace mención a la formación académica de los estudiantes y su incidencia en el proceso de resolución.

Elaborado por:	Jeison Camilo Sua Flórez
Revisado por:	Jaime Ibáñez Ibáñez

Fecha de elaboración del Resumen:	14	04	2017

Nota de aceptación:

Firma del asesor

Firma del jurado

Firma del jurado

Bogotá, D.C., Octubre del 2017.

A mi mamá, quien siempre ha sido un apoyo incondicional

AGRADECIMIENTOS

A mi mamá, apoyo incondicional en mi vida, por su paciencia, colaboración e impulso en todos los proyectos de mi vida.

A Angélica, por su paciencia, cariño y apoyo en cada momento duro que enfrenté. Su dedicación y compañía continua permitieron que este documento pudiera consolidarse.

A los profesores de la MTIAE, por sus aportes y enseñanzas. En especial, a Jaime, por su confianza y colaboración en el desarrollo de este proyecto.

A los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas que participaron en el proyecto. Su honestidad, compromiso y diligencia permitieron trazar los resultados del mismo.

Tabla de contenido

Tabla de diagramas

Tabla de Figuras

Tabla de tablas

INTRODUCCIÓN

Presentamos en este documento un estudio llevado a cabo con dos parejas de estudiantes de un programa de formación inicial de profesorado en matemáticas adscrito a la Universidad Pedagógica Nacional en Bogotá (Colombia), realizado en el segundo semestre del año 2016. El objetivo del estudio era identificar los comportamientos metacognitivos que tienen presencia en la resolución de problemas de demostración de geometría con la ayuda de geometría dinámica. A través del estudio se analizó la naturaleza de los comportamientos metacognitivos que tienen presencia al resolver este tipo de problemas, la incidencia y pertinencia de la geometría dinámica en estos, la diferencia entre los grupos involucrados en términos de los comportamientos observables y sus producciones y, finalmente, la naturaleza del proceso de resolución de este tipo de problemas.

Para desarrollar este estudio se adoptaron cuatro elementos dentro del marco teórico: la resolución de problemas, la demostración en geometría, los programas de geometría dinámica y la metacognición. A través del primer elemento del marco teórico se caracterizan los problemas de demostración y los episodios de la resolución de problemas. El segundo elemento del marco teórico permite reconocer algunas particularidades de la demostración matemática y su presencia en la geometría, además del favorecimiento de esta gracias a la geometría dinámica. El tercer elemento permite reconocer las bondades y dificultades de incorporar la geometría dinámica en el aula. El cuarto elemento del marco teórico permite caracterizar la metacognición en sus tres niveles: individual, social y ambiental.

De manera paralela, se acopiaron cuatro problemas reportados en la literatura que demandaban, en su solución, la formulación y justificación de una conjetura y que permiten exhibir comportamientos metacognitivos en el proceso de resolución. Posterior a ello, se desarrolló la implementación de los problemas considerados. Para el análisis de los resultados acopiados se involucró la metodología de análisis de protocolos (Maldonado, 2001; Sanabria, 2014), metodología que permite reconocer episodios de resolución y avanzar en el análisis de la información obtenida. Con base en el análisis realizado se establecieron resultados respecto a los comportamientos metacognitivos observados y su relación con el uso de la geometría dinámica, el nivel de formación de los estudiantes involucrados al momento de afrontar estas tareas y la naturaleza de los procesos de resolución observados.

El documento está estructurado en nueve capítulos, de los cuales este es el primero. El segundo presenta una justificación del estudio realizado, mostrando de manera panorámica el contexto en el que la investigación se sitúa, la pregunta de investigación y los objetivos propuestos. En el tercer capítulo se presenta un estado del arte sobre la resolución de problemas y la metacognición, en este capítulo se busca reconocer la relación simbiótica entre estos dos elementos teóricos, así como reconocer la presencia de ambos en la demostración en geometría. En el cuarto capítulo se presentan los elementos teóricos que fundamentan la investigación, los cuales ya se mencionaron en el primer párrafo. El quinto capítulo desarrolla los aspectos metodológicos considerados para el desarrollo de la investigación, en este se exponen los fundamentos de la metodología del análisis de protocolos, la revisión literaria con la que se fundamentó el estudio, el contexto de la población involucrada y la naturaleza de los problemas considerados.

El sexto capítulo presenta la transcripción y análisis de los protocolos de resolución obtenidos en cada uno de los problemas, identificando los episodios presentes en cada protocolo. En el séptimo capítulo se realiza un análisis al interior de cada grupo en el que se presentan las actuaciones de cada uno en función de los comportamientos metacognitivos representativos en cada episodio y la duración de cada uno de estos. En el octavo capítulo se realiza un análisis comparativo entre los dos grupos involucrados, en el que se discute sobre las estrategias adoptadas por cada uno y las diferencias y similitudes observadas en su trabajo. El capítulo final presenta las conclusiones de la investigación, estas responden a los objetivos planteados y a la pregunta que movilizó el estudio. Adicionalmente, se presentan en este último capítulo algunas proyecciones investigativas.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El campo de la educación matemática ha sido testigo de la formulación de propuestas para la enseñanza y el aprendizaje de distintos objetos matemáticos en diferentes niveles de formación. El vertiginoso crecimiento de las herramientas tecnológicas y el abanico de potencialidades que estas ofrecen no han sido ajenos a su incorporación en algunas propuestas de intervención en la clase de matemáticas. Particularmente, el desarrollo de ambientes virtuales que representan objetos matemáticos y permiten interactuar con ellos ha sido un aspecto que considerablemente ha favorecido la conceptualización de los mismos. El potencial de estos ambientes radica en la posibilidad de alejarse de representaciones estáticas en lápiz y papel, donde los objetos involucrados son dotados de propiedades que no necesariamente son ciertas y el trabajo que involucra los mismos se orienta exclusivamente en la mecanización de procedimientos, favoreciendo y dando relevancia ahora al uso de representaciones dinámicas, a través de las cuales se da una apertura a un conjunto de formas que, por su naturaleza, promueven y favorecen procesos matemáticos tales como: visualizar, conjeturar, argumentar y conceptualizar (Sandoval & Moreno, 2012; Valencia, Sanabria, & Ibáñez, 2012).

La investigación que se ha desarrollado en el campo de la educación matemática donde se involucran ambientes tecnológicos, particularizando el caso de la enseñanza y aprendizaje de la geometría, ha privilegiado el uso de programas de geometría dinámica [en adelante PGD o GD] y el desarrollo de procesos como visualizar, conjeturar y argumentar a través de su uso. A través de estos programas los objetos geométricos son construidos a partir de primitivas como puntos, rectas y circunferencias (Hoyles & Jones, 1998; Vincent, 2002), al mismo tiempo que se dotan de movimiento gracias a la función de arrastre. En la transformación efectuada sobre estos, a través de esta función, se conservan las propiedades con las que los objetos han sido construidos, por lo cual en este recurso se ha reconocido una herramienta útil para promover en los estudiantes el reconocimiento de relaciones de dependencia y el descubrimiento de propiedades que difícilmente se podrían observar en configuraciones estáticas como lápiz y papel, avanzando con ello hacia la comprensión de la demostración. Esto ha despertado, de acuerdo a Hanna (2001, p. 12), nuevos intereses en la enseñanza de la geometría.

Respecto a la demostración, se puede reconocer cronológicamente en la investigación en educación matemática un tránsito, desde hace varios años, que partió de enfoques donde se pretendían promover habilidades para la demostración en los estudiantes, hacia enfoques donde se estudiaba la evolución de la comprensión de los estudiantes respecto a la demostración y formas para apoyar dicha comprensión (Marrades & Gutiérrez, 2001, p. 88). Entre las bondades de la GD que han sido reconocidas se encuentra la posibilidad favorecer dicha comprensión (Hanna, 2001, p. 13; Marrades & Gutiérrez, 2001). La GD tiene el potencial de promover tanto la exploración como la demostración al facilitar el planteamiento y comprobación de conjeturas (Hanna, 2001, p. 13). Esto ha llevado al surgimiento de posturas a favor y en contra de la incorporación de estos recursos en la enseñanza de la demostración, pues para algunas personas estos llevan a que el estudiante soporte sus afirmaciones exclusivamente en evidencia empírica, la cual es generada por la animación de los objetos en pantalla. Aun así, la literatura reporta un constante crecimiento de investigaciones interesadas en estudiar la forma en que los PGD promueven en los estudiantes procesos de justificación (Sánchez, Sacristán, & Mercado, 2004).

Algunos autores han realizado investigaciones en las que han reconocido la dificultad de los estudiantes al afrontar la demostración (Koichu & Leron, 2015; Weber, 2005). Sus estudios los han llevado a involucrar algunos marcos teóricos de referencia que permitan comprender la dificultad afrontada por los estudiantes cuando se comprometen en este tipo de tareas (Koichu & Leron, 2015). A través de este ejercicio, en una de sus posibles vías, se ha logrado establecer una relación entre la demostración y la resolución de problemas en la que la primera es un caso especial de la segunda (Mamona-Downs & Downs, 2005; citado en Koichu & Leron, 2015). Las investigaciones realizadas, apoyadas en esta relación, han analizado las actuaciones de los estudiantes al afrontar demostraciones a la luz de la terminología que se ha construido alrededor de la resolución de problemas y los factores que intervienen en esta (Furinghetti & Morselli, 2009).

Al mismo tiempo, la investigación sobre la resolución de problemas ha llevado a que se reconozca en su desarrollo teórico la necesidad de acudir a otros elementos como la metacognición, con el fin de poder comprender la dificultad y bajos resultados que manifiestan los estudiantes al afrontar este tipo de tareas (Chinnappan, 1998; Erbas & Okur, 2012; Furinghetti & Morselli, 2009). Se reconoce que la resolución de problemas requiere implementar estrategias, vistas como como una colección de procesos matemáticos dispuestos en el orden en el que se ejecutarán (Frobisher, 1994; citado en Erbas y Okur, 2012). Algunos problemas pueden requerir apenas una estrategia, mientras otros pueden involucrar una colección de estas. Aspectos propios de la metacognición son importantes para la resolución de problemas con el fin de manejar la complejidad del problema mismo y evaluar el progreso hacia los logros (Cox, 2005). Dentro de los resultados más relevantes obtenidos en esta línea de investigación, se encuentra el hecho de que (i) individuos que cuentan con un conocimiento básico pueden obtener mejores resultados al resolver problemas que individuos con un conocimiento superior, cuando los primeros han desarrollado habilidades metacognitivas (estrategias) en un nivel superior con respecto a las de los otros individuos (Cai, 1994; Goos, 1994) y (ii) que el proceso de resolución de problemas se favorece gracias a la metacognición, cuando se consideran configuraciones colaborativas (Goos, Galbraith & Renshaw, 2002; citado en Hurme & Järvelä, 2005) y la influencia de recursos externos (Kim, Park, Moore, & Varma, 2013, p. 381).

En otras vías, la literatura (Kuzle, 2012, 2013a; Valencia et al., 2012) reporta resultados investigativos en los que se ha estudiado la resolución de problemas en conjunto con la metacognición y en los que inciden los PGD. A través de estos se ha reconocido el papel relevante de la metacognición al afrontar algún problema, inclusive si en esta media la GD. Por otro lado, algunas investigaciones ya han estudiado la pertinencia e incidencia de la GD dentro de la demostración en geometría (Christou, Mousoulides, Pittalis, & Pitta-Pantazi, 2004; Hanna, 2001; Healy & Hoyles, 2001; Laborde, 2000; Marrades & Gutiérrez, 2001). A través de estos estudios se ha reconocido que la GD apoya procesos de justificación cuando los estudiantes son enfrentados a situaciones cuidadosamente diseñadas que demandan construcciones geométricas, en las que se deben reconocer relaciones de dependencia entre los objetos representados en pantalla y estas se validan gracias a la función de arrastre, avanzando así al reconocimiento de conjeturas y su verificación.

Lo anterior permite reconocer que se han hecho esfuerzos en tres líneas distintas que involucran los mismos elementos. En primer lugar, se han reportado estudios en los que se realizan ejercicios para comprender la demostración a la luz de la resolución de problemas. Por otro lado, se ha documentado también el efecto y pertinencia de involucrar la GD en el desarrollo de habilidades de demostración. Finalmente, se ha estudiado la resolución de problemas en conjunto con la metacognición cuando se involucran PGD. Sin embargo, la literatura no ha reportado aun la relación entre la demostración en geometría, apoyada por la GD, y la resolución de problemas junto a la metacognición. Esto sitúa un asunto de investigación que merece la pena ser estudiado, dado que no se han reportado estudios de tal naturaleza hasta ahora y que es relevante identificar maneras a través de las cuales la demostración pueda ser alcanzada por los estudiantes sin que se presenten las dificultades y problemáticas que la literatura ya ha reportado.

Este asunto es importante en cuanto abordar la demostración de enunciados geométricos involucra no solo contar con una cantidad de recursos y representaciones dentro de un ambiente virtual como la GD, o tener un vasto conjunto de conocimientos, hechos o propiedades geométricas. También se requiere contar con habilidades de orden metacognitivo que permitan controlar y regular los conocimientos de los que se dispone, que permitan proyectar rutas de trabajo que sean adecuadas y descartar estrategias que no sean afortunadas para alcanzar la demostración de algún enunciado. Bajo este panorama se formula la siguiente pregunta que orientará la investigación cuya problemática ha sido ya mencionada.

> *¿Qué comportamientos metacognitivos tienen lugar en la resolución de problemas que involucran la demostración de enunciados geométricos cuando tiene presencia la geometría dinámica?*

OBJETIVOS

Objetivo general:

Identificar los comportamientos metacognitivos que tienen lugar en la resolución de problemas de demostración de enunciados geométricos cuando esta es apoyada por geometría dinámica.

Objetivos específicos:

- Determinar los comportamientos metacognitivos exhibidos por grupos de estudiantes cuando resuelven problemas de demostración en geometría.
- Identificar la presencia e incidencia de la geometría dinámica en los comportamientos metacognitivos exhibidos por distintos grupos de estudiantes.
- Reconocer la naturaleza de los procesos de resolución de problemas de demostración.

ESTADO DEL ARTE

En este capítulo realizamos una aproximación a los asuntos teóricos que son objeto de estudio en este documento. A partir de una revisión documental establecemos una conceptualización de la resolución de problemas y la metacognición, en la que se involucran elementos históricos de los conceptos en mención, algunos desarrollos teóricos y antecedentes investigativos que permiten reconocer el rumbo que ha tomado la investigación en estas líneas en los últimos años. Como se reconocerá a lo largo de los siguientes apartados, se establece una fuerte relación entre la resolución de problemas y la metacognición. De igual forma, se presenta la demostración en geometría como una instancia de resolución de problemas y la pertinencia de la geometría dinámica como recurso para el desarrollo de este tipo de problemas.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

A lo largo de las últimas décadas, según lo reporta la literatura, se han dado muchos esfuerzos para establecer una definición sobre lo que es resolver un problema, su naturaleza, e incluso lo que es un problema en sí mismo (Carlson & Bloom, 2005; Dettori, Greco, & Lemut, 1998). La literatura también ha permitido reconocer una diversidad de interpretaciones que se han planteado respecto a este término (Dettori et al., 1998; Duffield, 1991; Pochulu, 2010; Santos-Trigo, 2007; Schoenfeld, 1992), entre las cuales algunas llegan a ser contradictorias. Autores como Schoenfeld (1992) sitúan la resolución de problemas como un asunto cuya definición varía desde la resolución de problemas rutinarios, hasta la construcción de matemáticas en un nivel profesional. Según este autor, a partir de la década de los años ochenta, la comunidad de investigación en educación matemática empezó a poner atención en el desarrollo de habilidades propias de este proceso. Otros autores como Yimer y Ellerton (2006) señalan la alta presencia de la resolución de problemas en la literatura y el crecimiento de esta tendencia desde los años ochenta, aun cuando es el área menos comprendida o estudiada dentro del currículo en matemáticas. Para Lesh (2006), la investigación en aprendizaje y resolución de problemas en matemáticas ha estado oscilando por 50 años entre reformas curriculares que se enfocan en hechos y habilidades básicas y resolución de problemas.

Una aproximación inicial al concepto

Una aproximación dada por Duffield (1991), sobre la cual hay un acuerdo según lo menciona el autor, concibe al *problema* como una triada cuyos elementos son: *condiciones dadas* (información con la que se cuenta, restricciones y operaciones disponibles), *logros o metas* (estado ideal al que se debe llegar tras utilizar las *condiciones dadas* para saber que el problema se ha resuelto) y *obstáculos* (condiciones o restricciones que no permiten pasar inmediatamente de las *condiciones dadas* a las *metas* del problema). Por su parte, Schoenfeld (1992) menciona que un *problema* es *cualquier cosa que requiere ser hecha o algo requerido por hacer*, definición que involucra problemas rutinarios, aquellos que involucran mecanismos y procesos algorítmicos y para los cuales se ilustra un procedimiento, solicitando en otros problemas que el procedimiento ilustrado se repita, lo cual conllevará a dominar una estrategia de solución y configurar un conjunto de habilidades que conformarán en definitiva el conocimiento del estudiante.

Para Koyuncu, Akyuz y Cakiroglu (2015; citando a Blum & Niss, 1991) un problema es cualquier situación consistente en preguntas abiertas que desafían intelectualmente a alguien quien no está en inmediata posesión de métodos o procedimientos directos suficientes para responder la pregunta. Estos mismos autores señalan que la resolución de un problema establece compromisos sobre una tarea o situación para la cual no hay una inmediata o sencilla solución (Booker & Bond, 2008; citado en Koyuncu et al., 2015). Tanto Schoenfeld como Duffield consideran que cuando una clase de problema ha sido resuelta los problemas de la misma clase son rutinarios, se convierten en ejercicios y dejan de ser un problema dado que no hay un aprendizaje que tome lugar en su resolución. Particularmente Schoenfeld menciona que una condición importante para que una situación sea considerada como problema, es el desconocimiento por parte de quienes la enfrentan, es decir, no saber cómo responder a tal situación con procedimientos familiares o rutinarios sin importar su dificultad o extensión.

En el campo de la educación matemática los problemas han estado presentes a lo largo de la historia en todo momento (Schoenfeld, 1992). Sin embargo, este panorama no es similar para la resolución de problemas, donde apenas en las últimas décadas se han realizado aportes en su conceptualización y su estudio se ha dado en un sentido general (Dettori et al., 1998). Carlson y Bloom (2005) y Kuzle (2013b) aseguran que la comunidad de educación matemática ha mostrado un interés en conocer la naturaleza de la resolución de problemas a partir de 1980, iniciando por Polya, quien en 1957 estudió el proceso involucrado en esta, continuando por investigaciones enfocadas en estudiar los atributos o características de quien resuelve problemas de manera adecuada. Algunas de estas investigaciones permiten situar aspectos que tienen presencia allí, ejemplo de esto es Lester (1994; citado en Carlson & Bloom, 2005) quien se refiere a factores asociados que se interrelacionan (conocimiento, control, creencias y contexto socio cultural), Schoenfeld (1992) quien asegura la existencia de factores presentes en este proceso como la planeación y el monitoreo, y otros autores como Krutetskii (1969; citado en Carlson & Bloom 2005) quien considera que estos factores corresponden a las características de los individuos novatos y expertos que resuelven problemas, por mencionar algunos ejemplos.

Para Duffield (1991) la resolución de problemas se entiende como un *proceso dirigido de aprendizaje cognitivo*. Esta denominación atiende al uso de conocimiento o destrezas previamente adquiridas (*proceso*) que tiene como fin alcanzar una intención o logro en particular (*dirigido*) dejando un conocimiento nuevo ligado a las operaciones desarrolladas (*aprendizaje*) y que se desarrolla en la mente del individuo (*cognitivo*), motivo por el cual debe ser inferido por el comportamiento del mismo y no solo por el producto que deja su desarrollo. Una definición alterna es la planteada por Dettori et al. (1998), quienes señalan que la resolución de problemas es un procesamiento de la información que involucra conjuntos de estrategias generales y que además depende del dominio donde estas estrategias tengan lugar, por lo cual tales estrategias no pueden ser llevadas a un rango amplio de dominios. Para el caso de matemáticas, la resolución de problemas no corresponde apenas a proponer una situación y preguntar por su resultado; por el contrario, es un enfoque de aprendizaje donde distintos conceptos teóricos son introducidos durante la solución a un problema. Este enfoque favorece la aplicabilidad y seguridad de conceptos previamente aprendidos, así como la introducción de otros nuevos.

Santos-Trigo retoma las ideas de Lester y Kehle (2003; citado en Santos-Trigo, 2007) para quienes la resolución de problemas es vista como una actividad en la que el estudiante se compromete en una variedad de acciones cognitivas, accediendo a conocimiento y experiencias previas. Esta definición involucra elementos similares a los considerados por Bjuland (2007), para quien la resolución, según Barkatsas y Hunting (1996; citadas en Bjuland, 2007), se define como un proceso cognitivo, metacognitivo, afectivo y socio cultural que pretende solucionar un problema. Igualmente Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez (2013) retoman ideas de algunos autores, incluyendo las expuestas por Santos-Trigo (2007) para caracterizar la resolución de problemas. Esta se ve para ellos como una actividad que conceptualiza la disciplina a través de conjuntos de problemas que requieren ser explorados y resueltos en términos de recursos y estrategias, con lo cual se promueven acciones cognitivas que engranan diversos conceptos y procedimientos que permiten construir aprendizaje con comprensión (Hiebert et al., 1997; citado en Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez, 2013).

Algunas clasificaciones sobre la resolución de problemas han sido elaboradas, de acuerdo a sus características y similitudes. Stanic y Kilpatrick (1989; citado en Pochulu, 2010), realizaron una revisión literaria respecto a la resolución de problemas y decantaron tres temas principales respecto a su estudio (la forma en que tienen presencia los problemas) proponiendo así las siguientes categorías: contexto, habilidad y hacer matemáticas. A continuación, una breve descripción de cada aspecto:

- Contexto: hace referencia al caso en el que se involucran las matemáticas en situaciones cotidianas, se introducen nuevos elementos de estudio, se establecen conexiones con otras disciplinas y se refuerzan procesos algorítmicos; en esta categoría, según Schoenfeld (1992), se contempla la resolución de problemas únicamente como un facilitador de logros y no como una meta en sí misma.
- Habilidad: hace alusión a considerar la resolución de problemas como una habilidad de orden superior que se debe enseñar e incluir en el currículo dado que permite solucionar problemas en distintos dominios. Según Schoenfeld (1992), esta consideración sitúa a la resolución de problemas en un nivel alto dentro de los elementos que deben ser aprendidos por los estudiantes.
- Hacer matemáticas: hace referencia al desarrollo de las matemáticas, como disciplina, a partir de problemas y sus soluciones. En esta última se considera la resolución como un arte, en el cual esta es base para la construcción de las matemáticas. La resolución de problemas es el corazón de las matemáticas e incluso las matemáticas en sí mismas (Schoenfeld, 1992).

Una aproximación histórica a la resolución de problemas

Un estudio a los orígenes de la resolución de problemas conduce a considerar las ideas de Jeremy Kilpatrick (1969), quien ya en ese entonces hacía mención a la relevancia de la habilidad para resolver problemas como un objetivo en la instrucción matemática, aunque era más en ese momento lo que se pretendía hacer u obtener, que lo que se había estudiado y fundamentado al respecto, es decir, se tenían amplias intenciones aun cuando no se contaba con un soporte teórico consolidado. Gran parte de las motivaciones sobre la incorporación de la resolución de problemas en el contexto educativo provenían de los resultados y discusiones que tenían lugar en congresos académicos, sugiriendo además que dentro del conocimiento del profesor este aspecto debería tener presencia.

A finales de los años sesenta se reconocía que la resolución de problemas no era un objeto de estudio sistemático dentro de la comunidad de educación matemática, esto en cuanto la mayoría de las investigaciones no se apoyaban en resultados previos y no se involucraban elementos teóricos en la gran mayoría (Kilpatrick, 1969). Sin embargo, asegura Kilpatrick, algunos estudios iniciaban a involucrar elementos y técnicas de constructos teóricos provenientes de la psicología, particularmente los procesos cognitivos. Puede considerarse, por ejemplo, el caso de la habilidad para resolver problemas, la cual no se consideraba como un fenómeno unitario, más bien su naturaleza daba lugar a relaciones entre el éxito de un sujeto al resolver un problema y características de su pensamiento y personalidad. Los estudios realizados hasta ese momento respecto a la habilidad en la resolución de problemas involucraban comparaciones sencillas entre el desempeño de grupos, así como el análisis complejo de otros factores. Las investigaciones realizadas en ese entonces reportaban algunas diferencias, en términos del logro y desempeño al resolver problemas, a partir del contenido o estructura del problema mismo.

Al intentar analizar y comprender el proceso llevado a cabo para resolver un problema no se podía tomar como evidencia la solución del mismo, dada la poca información que esta contendría. Por ello, los procesos de resolución debían estudiarse a través de secuencias de comportamiento observables en los sujetos. Entre las propuestas contempladas para tal fin, la cual se involucró en gran medida dentro de las investigaciones en educación matemática y aun hoy día goza de gran confiabilidad, se encontraba la técnica de pensar en voz alta (Think Aloud Strategy), sugerida por Duncker (1945; citado en Kilpatrick, 1969), psicólogo interesado en estudiar cómo se resolvían problemas matemáticos complejos. Ya a finales de 1980 los educadores matemáticos estaban de acuerdo con la idea de desarrollar habilidades para la resolución de problemas y desde ese momento se convirtió en foco en el campo de la educación matemática, como un aspecto curricular para la enseñanza y como un fin dentro de los logros de la educación (Stanic & Kilpatrick, 1989; citado en Kuzle, 2013).

Instrucción en resolución de problemas

Sobre la elaboración de Polya respecto a la resolución de problemas, sus heurísticas[1] han sido tomadas como base de las habilidades relevantes que los estudiantes deben desarrollar (Lesh, 2006). De acuerdo a Lesh, muchos expertos han hecho uso de estas heurísticas para describir sus comportamientos o los de otros al momento de resolver un problema. Sin embargo, retomando las ideas de Begel (1979; citado en Lesh, 2006), no se cuenta con mucha evidencia de que estos procesos señalados por los expertos puedan servir como prescriptores para guiar a los novatos en su proceso de resolución. Esto se suma a la postura de Schoenfeld (1992; citado en Lesh, 2006), para quien los intentos de enseñar a los estudiantes cómo usar estrategias generales de resolución de problemas no era generalmente exitosa. Para Schoenfeld las heurísticas declaradas por Polya son de tipo descriptivo y son etiquetas de amplias categorías de procesos más que ser procesos bien definidos en sí mismos. Esto develó la necesidad de avanzar de unos procesos descriptivos a unos prescriptivos. Este ejercicio requería, según Schoenfeld, desarrollar y enseñar estrategias de resolución de problemas específicas (ligadas a clases específicas de problemas), estudiar cómo enseñar estrategias metacognitivas a los estudiantes, para que ellos implementen efectivamente sus estrategias de resolución de problemas y conocimiento de contenido; finalmente, desarrollar formas de eliminar en estudiantes creencias contraproducentes, promoviendo otras productivas ligadas a la naturaleza y resolución de problemas en matemáticas (Lesh, 2006). Estas y otras consideraciones han llevado a que la resolución de problemas se convierta en un objetivo en el campo de la educación matemática en las últimas décadas (Panaoura, 2012).

El énfasis dado por los profesores a la incorporación de la resolución de problemas en el aula atendía también a aspectos normativos y reformas curriculares (Kramarski, Mevarech, & Arami, 2002; Mevarech & Fridkin, 2006), reconociendo la NCTM como gran precursor de este movimiento (Kuzle, 2015b). Kramarski et al. (2002) señalan tres aspectos que motivaron, desde esta perspectiva normativa, un giro hacia este asunto: la aplicación del conocimiento matemático en

---

[1] Una concepción del termino heurísticas es presentada en Koichu et al. (2006, p. 458). Estas se conciben como un enfoque sistemático para la representación, análisis y transformación de los problemas matemáticos, usadas por los individuos que abordan esta tarea para la planeación y monitoreo de sus soluciones. Estas pueden ser especificas o generales a un dominio de conocimiento y pueden promover una estrategia general de resolución o apenas un pequeño avance en el proceso.

la resolución de problemas del mundo real, la profundización y consolidación del conocimiento matemático que tiene lugar al afrontar y resolver conflictos cognitivos y la posibilidad de incrementar el interés de los estudiantes en las matemáticas al ver su utilidad. A propósito de las matemáticas y su utilidad en el contexto cotidiano, Kuzle (2013, citando a Fey, Hollenbeck & Wray, 2010) señala que desde inicios del siglo 21 el crecimiento de la presencia de las matemáticas en el trabajo en distintas áreas de la industria, los negocios, las ciencias y otras más demandaron que los estudiantes aprendieran unas matemáticas distintas y en mayor cantidad a las impartidas en el nivel escolar, lo que implicó desafíos sin precedente en las prácticas escolares.

Alrededor de los años sesenta ya se reportaban distintos programas de instrucción en resolución de problemas (Kilpatrick, 1969). Algunos de estos programas se constituían apenas por técnicas para la instrucción, mientras que otros contenían ya un marco teórico explícito que los sustentaban. Algunos programas de instrucción consideraban que las condiciones significativas para desarrollar habilidades en la resolución de problemas involucraban ofrecer a los estudiantes guías y criterios que pudieran ser utilizados por ellos para evaluar su progreso en los productos y procesos realizados (Hollingworth & Mcloughlin, 2005). Ejemplo de esto es: un repertorio de estrategias de aprendizaje, capacidad de manejar el propio aprendizaje y la capacidad de manejar el conocimiento y habilidades propias. Estos criterios se consideraban fundamentales para aprender efectivamente y resolver problemas en contextos diversos.

La resolución de problemas no puede considerarse apenas como un método, por el contrario, este proceso promueve la profundización en el conocimiento y comprensión de diferentes conceptos (Erbas & Okur, 2012). Kuzle (2015b) asegura que la resolución de problemas no es solo un objetivo instruccional, sino también un método instruccional a través del cual se puede construir nuevo conocimiento matemático, resolver problemas que surgen en el campo de las matemáticas y otros distintos a este, así como aplicar estrategias de resolución y monitorear y reflexionar sobre los procesos de resolución involucrados. Al respecto, como precedente a esta intención, Mayer (1998) presentó el escenario donde los estudiantes aprendían a resolver problemas rutinarios pero no podían responder ante situaciones novedosas, asunto que lo llevó a indagar sobre un mecanismo que promoviera en los estudiantes habilidades en ambos campos, dada la necesidad de instruir a los estudiantes en la resolución de problemas que por completo fueran novedosos para ellos. Las clases de matemáticas requieren más que habilidades aritméticas o de cálculo, demandan la extensión y adaptabilidad del conocimiento previo y la flexibilidad en el pensamiento, aspecto alcanzable al considerar la resolución de problemas en la instrucción matemática (Kuzle, 2015b).

Hollingworth y Mcloughlin (2005) aseguran que en la educación superior, para el caso de las ciencias, debe darse un énfasis a la enseñanza a través de este proceso y no simplemente por contenidos, este énfasis permitiría desarrollar competencias de vital importancia en el contexto donde se desenvuelven los individuos. Para ellos la enseñanza tradicional permite desarrollar habilidades cognitivas de orden inferior, respecto a aquellas desarrolladas por el trabajo alrededor de la resolución de problemas. Para Duffield (1991) un aspecto que debe tenerse en cuenta en el enfoque de resolución de problemas es que el medio a través del cual este se resuelva no debe proveer al estudiante información de cuándo el problema ha sido resuelto, en cuanto esto reduce la probabilidad de aprendizaje por parte del aprendiz. El estudiante debe ser capaz de reconocer cuando el problema ha sido resuelto en totalidad. Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez (2013) mencionan que este enfoque de aprendizaje requiere que los estudiantes participen en la comunicación y evaluación de las ideas que emergen en al abordar los problemas.

Para Chinnappan y Lawson (1996) la resolución de problemas involucra la ejecución de procesos específicos y generales dentro del dominio en el que el problema se adscribe. El conocimiento específico en un dominio particular parece que no es una condición suficiente para la producción de soluciones a problemas. Son las estrategias generales aquellas que favorecen el uso del conocimiento específico y con ello la resolución del problema. Aquellos estudiantes que presentan dificultades en la resolución de problemas son por lo general quienes no emplean estrategias generales que les permitan utilizar el conocimiento específico del que disponen. Se habla entonces de un conocimiento inerte, que solo se utiliza bajo la activación del profesor u otros factores externos, pero no de forma autónoma (Chinnappan & Lawson, 1996).

Estas y otras consideraciones han permitido que uno de los propósitos más importantes del aprendizaje matemático, sobre el cual se ha notado en los últimos años un crecimiento en sus esfuerzos, sea promover el conocimiento matemático, donde se incluyan conceptos matemáticos y habilidades para la resolución de problemas (Bayat & Tarmizi, 2010). El aprendizaje de estos elementos involucra distintas y variadas estrategias cognitivas y metacognitivas[2] que les permitan

[2] El concepto de metacognición se presenta con detalle en el siguiente apartado.

codificar, organizar y recuperar nueva información. Mayer (1998) aseguraba que el logro de resolver problemas no rutinarios involucraba la necesidad de poseer habilidades, meta-habilidades (metacognición) y motivación. Este autor argumenta la imposibilidad de las habilidades por sí mismas para alcanzar el logro considerado, dada la falta de control y orquestación sobre los componentes cognitivos involucrados.

Para Hollingworth y Mcloughlin (2005) todas estas estrategias enfocadas en auto-manejar el aprendizaje, en el caso de la resolución de problemas, se conocen como metacognición. Según ellos, la metacognición se da tanto en un nivel de conocimiento como en uno de regulación respecto a la cognición. Sobre el primero, este involucra el conocimiento y comprensión sobre la tarea que se pone en juego; mientras que el segundo corresponde a las estrategias puestas en juego para resolver la tarea, incluyendo la planificación, seguimiento y revisión de la tarea, de sus resultados. Aun cuando las habilidades metacognitivas y aquellas relacionadas con la resolución de problemas no están desarrolladas en un nivel alto en los estudiantes, estas pueden ser potenciadas a través de un cuidadoso diseño con condiciones especiales (ver Hollingworth & Mcloughlin, 2005); sin embargo, en el nivel universitario el desarrollo de estas habilidades (metacognitivas y referidas a la resolución) ha sido escaso, aseguran los autores, dado que la literatura reporta su estudio en el nivel de educación escolar principalmente.

A mediados de los 90 e inicios del año 2000 se reportaban investigaciones que mostraban el efecto de la formación de estudiantes en la resolución de problemas matemáticos y el uso de estrategias generales para llevar a cabo este proceso (Chinnappan & Lawson, 1996; Kramarski et al., 2002). Algunas de estas intervenciones se caracterizaban por adicionar el trabajo colaborativo entre estudiantes, reconociendo un potencial dado por la discusión y puesta en común de ideas y métodos para afrontar un problema, aspecto no presente cuando se ignoraba un trabajo colaborativo y se proponía una formación individual (Kramarski et al., 2002). Otras propuestas se enfocaban en involucrar métodos instruccionales metacognitivos, comparando el desempeño matemático entre grupos que eran instruidos bajo esta propuesta y grupos regulares (Mevarech & Fridkin, 2006). Otras intervenciones se caracterizaban por involucrar ambientes computacionales que promovieran habilidades para la resolución (Panaoura, 2012). Los resultados de estas intervenciones evidencian el potencial de las propuestas de instrucción de esta naturaleza respecto al favorecimiento de habilidades metacognitivas y su uso en la resolución de problemas. Dentro de las propuestas formuladas se reconoce como pionera la de Polya en 1957, al involucrar heurísticas en el proceso de resolución, lo que llevó a determinar estrategias muy generales para llegar a una solución (Chinnappan & Lawson, 1996; Mevarech & Fridkin, 2006).

Ahora bien, en el campo de la educación matemática se han reconocido recursos como los videojuegos y programas de computador multimedia como complemento a la instrucción (Panaoura, 2012). Las tecnologías de la información y la comunicación son consideradas como un mecanismo a través del cual se remodela la base material de la sociedad y se soportan distintas actividades de aprendizaje (Tella, 2011; citado en Panaoura, 2012). En consecuencia, la instrucción en la resolución de problemas, particularmente, se puede beneficiar del uso de nuevas tecnologías y el desarrollo de software interactivo. Para Chen y Chiu (2015) los recursos tecnológicos como los ambientes táctiles median como contextos colaborativos donde los miembros de un grupo pueden interactuar y exponer sus ideas a los compañeros. Esto promueve la discusión alrededor de cada propuesta, la participación y el conocimiento de cada miembro respecto a los asuntos involucrados en el marco de la tarea abordada.

Modelando el proceso de resolución

El estudio de la resolución de problemas matemáticos llevó no solamente a que metodologías para la instrucción se formularan con el ánimo de promover los procesos y habilidades enmarcados en esta práctica en los estudiantes. Adicionalmente, elaboraciones de modelos que contemplaban los procesos cognitivos inmersos se iniciaban a reportar en la literatura con el ánimo de suministrar herramientas que permitieran comprender, identificar y caracterizar las actuaciones de los estudiantes cuando se comprometían en este tipo de actividad (Dinnel, Glover, & Ronning, 1984; Kuzle, 2015a). Si bien es cierto que la comunidad de educación matemática ha manifestado su interés en los aspectos cognitivos de la resolución de problemas, algunos asuntos de este proceso no se han comprendido completamente y muchos de los modelos propuestos se han presentado a través de múltiples fases que tienen presencia de forma lineal (Koichu, Berman, & Moore, 2006). En sus primeras aproximaciones, estos modelos mostraban algunas dinámicas entre distintos elementos sin querer con ello ser ostentosos en su formulación, más bien, sirviendo como elaboraciones provisionales que hacían un llamado a investigaciones posteriores que condujeran a una formulación más cercana y refinada respecto a las dinámicas inmersas en este proceso y su especificidad de acuerdo al dominio de conocimiento abordado en el problema (Dinnel et al., 1984, p. 461). Dinnel et al. señalaron que dentro de las utilidades de estos modelos se encuentran (i) la posibilidad de examinar las diferencias individuales en el procesamiento de la información entre estudiantes al resolver problemas, (ii) la oportunidad de estudiar los protocolos exhibidos por un estudiante al resolver problemas, permitiendo clasificar estos y trazar estilos de comportamiento, y (iii) la posibilidad de refinar cada modelo a partir de la retroalimentación dada sobre el análisis de actuaciones.

Particularmente, Kuzle (2015a) resalta aquel modelo propuesto por Polya y realiza algunas aclaraciones sobre el mismo. El proceso de resolución de problemas propuesto por Polya (1957; citado en Carlson & Bloom, 2005), menciona cuatro etapas, estas son: comprender el problema, desarrollar un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás. Kuzle señala que entre estas fases no hay un recorrido lineal, sino más bien uno cíclico e iterativo, en cuanto estar en una fase podría, por ejemplo, llevar a que un estudiante reconsiderara su estrategia involucrada y con ello retrocediera para revisar y reformular su plan (Kuzle, 2015a, p. 630). Kuzle ilustra los distintos flujos o recorridos que podrían tener lugar entre estas fases en la Figura 1.

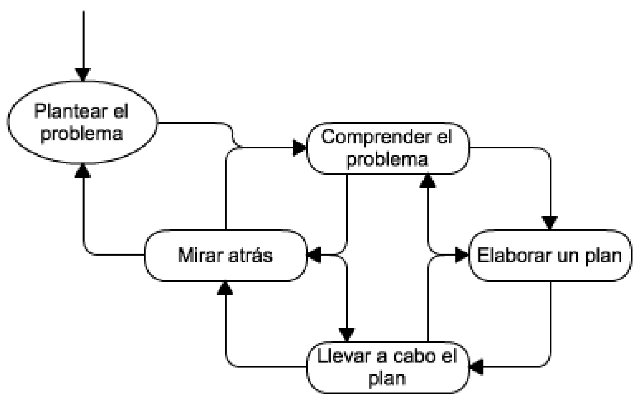


Figura 1. Interpretación dinámica y cíclica del modelo de Polya. Tomado de Kuzle (2015 a, p.630).

Otras investigaciones alrededor de este constructo también han indagado por las fases que lo constituyen y las heurísticas presentes en el proceso de resolución (Koichu et al., 2006). Algunas de estas investigaciones se han caracterizado por identificar episodios de la resolución de problemas a partir del análisis de la interacción llevada a cabo por los estudiantes cuando enfrentan este tipo de tareas. Otras investigaciones han involucrado análisis sobre el comportamiento neuronal de los individuos, ejemplo de ello es la investigación realizada por Anderson, Lee y Fincham (2014). Estos autores analizaron el trabajo ejecutado por un individuo sobre la base de su actividad neuronal, proveyendo así estados mentales y secuencias entre ellos que tienen lugar al resolver problemas matemáticos.

Resolución de problemas: estrategias y habilidades

La resolución de problemas ha sido objeto de estudio también en relación a las estrategias que convocan y las habilidades que deben tenerse para que el resultado obtenido sea afortunado (Erbas & Okur, 2012). Bjuland (2007) retoma algunas ideas de Schoenfeld (1992) y menciona que cuando un estudiante no cuenta con habilidades para resolver problemas, la forma en que aborda la solución corresponde a realizar exploraciones no estructuradas y avanzar por un camino de solución sin revisar su progreso o reconsiderar el mismo; a diferencia de los expertos, quienes optan por comprender el problema inicialmente y proceder a resolverlo cuando tienen total seguridad sobre el camino elegido. Adicionalmente, los expertos se caracterizan por tener un comportamiento que involucra un dominio alto de conocimiento y conexiones entre los elementos de este conocimiento; ellos monitorean y regulan su desempeño al resolver el problema, producen elegantes soluciones, tienen seguridad sobre sus debilidades y fortalezas y se enfocan tanto en las relaciones subyacentes como en las relaciones involucradas en el problema (Carlson & Bloom, 2005). Por otra parte, Goos y Galbraith (1996; citados en Bjuland, 2007) señalan que los estudiantes, al resolver problemas, optan por realizar una lectura rápida del enunciado e implementar de inmediato una ruta para su solución sin ser conscientes de la fiabilidad de la misma. Retomando las ideas de Lester (1994; citado en Bjuland, 2007), en la resolución de problemas exitosa un factor primordial es la seguridad metacognitiva, aun cuando se debe reconocer que es difícil enseñar a los estudiantes cómo monitorear su proceso y comportamiento.

Respecto a las habilidades que intervienen en la resolución de problemas, autores como Guven et al. (2012) y Carlson y Bloom (2005), retoman las ideas de Schoenfeld (1992) acerca de cuatro factores que afectan las habilidades de los estudiantes en este proceso: *recursos*, *heurísticas*, *control* y *sistema de creencias*. A continuación, una breve descripción de cada una.

- Los *recursos* se entienden como el conjunto de conocimientos, procedimientos y competencias en un dominio específico.
- Las *heurísticas* corresponden a las reglas, estrategias y técnicas del individuo al momento de abordar problemas.
- El *control* corresponde al monitoreo empleado en el proceso de resolución de problema que desarrolla, el cual le permite evaluar y modificar su proceder al respecto.
- El *sistema de creencias* hace alusión a la visión o perspectiva del mundo de las matemáticas.

Según Gourgey (1998, 2001) la instrucción tradicional ha dado un mayor énfasis a las dos primeras categorías, lo que lleva a pensar que el bajo rendimientos de los estudiantes en la resolución de problemas puede darse por la ausencia de las dos últimas categorías. Esto es, el contar con conocimiento apropiado sobre el dominio de conocimiento para resolver un problema, pero fallar al utilizarlo debido a no monitorear y evaluar sus decisiones (regular su pensamiento) ni reconocer si estas son apropiadas o no.

Guven et al. (2012) en su estudio hacen alusión a los programas de geometría dinámica y sobre estos consideran que afectan el proceso de la resolución de problemas, a la vez que amplían o limitan el conjunto de heurísticas de los estudiantes para resolver problemas. Bajo esta consideración, para los autores el significado de *recursos* debería ser ampliado para que además de lo mencionado arriba se incluyan también las habilidades con estas herramientas tecnológicas. En esta misma línea, autores como Özen y Köse (2013) ofrecen una amplia revisión respecto a la resolución de problemas y programas de geometría dinámica, proponiendo como principales fases en el proceso de resolución en estos ambientes la construcción, exploración, conjetura y validación (Mogetta, Olivero y Jones, 1999; citado en Özen y Köse, 2013).

Resolución de problemas y ambientes de geometría dinámica

El uso de los computadores en la educación matemática ha atendido a propósitos como el descubrimiento de patrones y relaciones, la representación gráfica de principios matemáticos, la prueba y contradicción de conjeturas, la verificación de resultados con el fin de avanzar hacia su demostración y eliminación de complejos y tediosos procesos manuales, por mencionar algunos (Zbiek, 2003; citado en Koyuncu et al., 2015). Kuzle, haciendo eco a autores como Wilson, Fernández y Hadaway (1993, citado en Kuzle, 2012), señala la importancia de la tecnología como una herramienta para la resolución de problemas matemáticos. En particular, y consonante con la mirada dada desde la NCTM (2000, citado en Kuzle, 2012), esta autora reconoce el uso de la geometría dinámica como necesario en todos los niveles educativos donde se involucren asuntos geométricos ya que su naturaleza interactiva dinámica vincula a los estudiantes en actividades matemáticas significativas y promueve una profunda comprensión de conceptos.

En el aprendizaje y enseñanza de la geometría, en particular, autores como Koyuncu et al. (2015), retomando investigaciones realizadas, reconocen los programas de geometría dinámica como la herramienta más apropiada y en estos su superioridad sobre el trabajo realizado en lápiz y papel; sin querer decir que este último se vea remplazado, más bien, que pueden complementarse ya que cada uno promueve en los estudiantes desarrollos conceptuales y la emergencia de conceptos diferentes (Gomes & Vergnaud, 2010; citado en Koyuncu et al., 2015).

Los programas de geometría dinámica han renovado las prácticas que tienen lugar en la clase de geometría, son varios los ejemplos que en la actualidad pueden ser mencionados respecto a este tipo de recursos (*v.g.* Cabri Geómètre, Geogebra, CaRmetal, Geometer's Sketchpad, Cinderella, RyC, Geometrix). El potencial de esta herramienta radica en la forma en que los objetos geométricos que se involucran en el ambiente virtual pueden ser manipulados en tiempo real a través de la función de arrastre sin que las propiedades que los caracterizan se alteren. Ejemplo de esto es considerar un cuadrado que se haya construido utilizando rectas perpendiculares; cuando uno de sus vértices es arrastrado, la figura se transforma únicamente en términos de su tamaño o posición relativa respecto a la pantalla sin que las propiedades del objeto se alteren, esto es, la perpendicularidad de los lados y la congruencia de los mismos se mantiene constante. Propiedades como esta y otras más (*v.g.* determinar medidas, verificar relaciones geométricas y activar la traza de un punto para evidenciar el lugar geométrico que describe) convierten este recurso en una herramienta que permite tomar distancia de las representaciones estáticas en lápiz y papel, enfocándose con ello en un ambiente dinámico que favorece el desarrollo de procesos propios de la geometría (visualizar, argumentar, conceptualizar y conjeturar) que en otros ambientes no sería posible potenciar en un mismo nivel. Igualmente, la retroalimentación que estos programas ofrecen al usuario se caracteriza por no ser alcanzable en otro tipo de ambientes no dinámicos, proveyendo así una perturbación única para al usuario (Olive & Makar, 2000; citado en Kuzle, 2012).

En estos ambientes computacionales las construcciones elaboradas yacen en elementos primitivos como puntos, rectas y planos (Jones, 2002; citado en Valencia, Sanabria & Ibáñez., 2012). Los programas de geometría dinámica permiten así transformar la clase de matemáticas en un ambiente investigativo, donde los estudiantes se comprometen en observar, manipular, predecir, conjeturar, testar y proveer explicaciones a resultados o fenómenos observados (Fey, Hollenbeck y Wray, 2000, citado en Kuzle, 2012).

En el marco de la resolución de problemas, los programas de geometría dinámica ofrecen al individuo recursos que bien podrían caracterizarse a través de dos dimensiones o campos de referencia: gráfico-espacial y teórico (Laborde, 2004; citado en Oner, 2013). En el primero se hace referencia a entidades gráficas y operaciones sobre estas; respecto al segundo, el conocimiento matemático y relaciones teóricas son puestas de manifiesto. Para Oner (2013) aquellas personas expertas en resolver problemas se caracterizan por hacer referencia a ambos dominios y continuamente estar en uno u otro, aspecto considerado como parte esencial del significado de la geometría (Oner, 2013, citando a Laborde, 2004); en consecuencia, el éxito en la resolución de problemas geométricos puede ser caracterizado a través de la interacción entre estos dos campos y su uso conjunto. La geometría dinámica es un escenario donde esta relación tiene mayor presencia (Oner, 2013, citando a Laborde, 2004).

Las construcciones realizadas en estos ambientes encarnan las relaciones teóricas sobre las cuales estos objetos han sido representados y con ello se separan de una representación gráfica, sobre la cual no es posible reconocer propiedades o en la que se podría incurrir en asumir como válida alguna propiedad no necesariamente verdadera. De esta forma los programas de geometría dinámica ofrecen a los usuarios un tipo de retroalimentación que es regulada por la teoría que subyace a la construcción realizada (Oner, 2013, citando a Laborde, 2004) y con ello se brinda al usuario una aproximación al campo teórico a partir de la interacción dada en el campo gráfico-espacial y se promueve también que cualquier construcción realizada, con el ánimo de ser correcta, atienda a aspectos teóricos (Oner, 2013). Para Oner la geometría dinámica es un escenario único donde participan ambos campos, donde las relaciones teóricas pueden ser descubiertas o utilizadas, y donde se deben establecer conexiones entre estos campos para resolver problemas. A continuación, presentamos en orden cronológico algunas investigaciones realizadas en el marco del uso de geometría dinámica y la resolución de problemas.

Algunos antecedentes sobre la resolución de problemas y el uso de geometría dinámica

Ubicamos inicialmente a Jurdak (2000), quien llevó a cabo un estudio donde examinó la relación entre la tecnología y su aporte en la resolución de problemas a partir de lo que él denomina mitos y realidades. El desarrollo de la investigación involucró la propuesta de Schoenfeld (1985; citado en Jurdak, 2000) y los cuatro componentes propuestos por él que se configuran en la resolución de problemas y que se favorecen con la inclusión de la tecnología. Su estudio se enfocó en sustentar teóricamente tres realidades que contradicen mitos asociados al uso de las tecnologías en la educación matemática en el marco de la resolución de problemas. Los resultados de la investigación apuntan a señalar la necesidad de involucrar las tecnologías en la resolución de problemas y atender con ello a los contextos, tanto escolares, como extraescolares, donde pareciera que las estrategias involucradas al momento de resolver un problema en el primer contexto no son cercanas a las involucradas en el segundo contexto mencionado.

Para Healy y Hoyles (2001) el software de geometría dinámica, sin desconocer sus bondades, también trae consigo algunas dificultades para sus usuarios al momento de llevar a cabo procedimientos para resolver un problema. En un estudio desarrollado por las autoras, en el que se implementó una secuencia de problemas que involucraban en su uso geometría dinámica, pudo evidenciarse como este recurso servía de andamiaje en el proceso de solución en algunos casos, promoviendo además que procesos de conjetura y argumentación tuvieran lugar; sin embargo, en otros casos, las herramientas del programa no permitían a los estudiantes materializar sus ideas, llevándolos en consecuencia a abandonar rutas de solución afortunadas y con ello a que el problema no pudiera ser resuelto. Para las autoras la geometría dinámica provee un escenario donde estrategias particulares tienen lugar de manera exclusiva. Esto lleva a manifestar que este tipo de programas median en las actuaciones de los estudiantes al resolver problemas y apoyan en ellos el desarrollo de concepciones, aunque no siempre esta mediación es positiva. En este último caso, aseguran las autoras, los estudiantes se encuentran en un estado donde no se pueden usar las herramientas deseadas como se quisiera, aun cuando el resultado tenga consistencia.

Los programas de geometría dinámica han permitido sortear también dificultades asociadas a la falta de comprensión respecto a las relaciones de dependencia. En esta línea, Moreno y Santillán (2004) estudiaron las dificultades que hay entre variable y variación, así como algunas problemáticas que los estudiantes manifiestan al respecto. Para ello involucraron Cabri como recurso tecnológico, apoyándose en las relaciones de dependencia que allí tienen lugar en el marco de la manipulación de figuras geométricas con las funciones de arrastre. El desarrollo de la investigación involucró como fundamento teórico la propuesta teórica elaborada por Pierce acerca de los signos e interpretantes. Respecto a la metodología, se llevó a cabo una entrevista a un estudiante, quien manejó Cabri al resolver un problema que contempla la manipulación de una figura geométrica, con el fin de obtener información sobre la forma en que operaba los objetos que intervenían en la figura. La investigación permitió afirmar que la geometría dinámica es apropiada para distinguir la variación y la variabilidad y avanzar hacia una representación simbólica de las relaciones inmersas.

Santos-Trigo y Cristóbal-Escalante (2008) analizaron las estrategias que tenían lugar en la resolución de problemas. Para ellos este asunto tenía importancia al considerar que en ese momento había un gran auge en el desarrollo de propuestas que involucraban aproximaciones a la resolución de problemas. Para ello, adoptaron como marco teórico las trayectorias hipotéticas de aprendizaje (Simon y Tzur, 2004; citado en Santos-Trigo & Cristóbal-Escalante, 2008) y a partir del mismo formularon una propuesta de actividades, basada en problemas geométricos que involucran geometría dinámica para su desarrollo, los cuales al momento de implementarse permitirían evidenciar las estrategias que se adoptaron para su resolución. Los autores concluyen que la geometría dinámica es una fuente rica de oportunidades para resolver problemas, su uso se interioriza y el ambiente deja de ser una herramienta mera, convirtiéndose en un instrumento que provee esquemas de uso (esquemas cognitivos) y formas de operar con él. Los autores establecen preguntas para continuar la investigación, entre las que se encuentra una referida al grado en que un software favorece la argumentación de los resultados obtenidos.

Iranzo y Fortuny (2011) llevaron a cabo un estudio donde analizaron la influencia de Geogebra en la resolución de problemas de geometría plana, reconociendo la forma en que este software de geometría dinámica apoya la comprensión matemática de los estudiantes al promover rutas distintas de resolución y en algunos casos permitir diagnosticar sus dificultades de aprendizaje. Para los autores el trabajo en ambientes de geometría dinámica tiene particularidades no evidentes en el trabajo realizado en ambientes de lápiz y papel, incluyendo entre estas la retroalimentación a las acciones de los estudiantes. A través de un estudio de caso se analizaron los comportamientos de doce estudiantes de décimo grado en un colegio de España al resolver problemas de geometría plana. Se llevaron a cabo dos momentos en el análisis sobre los datos acopiados. En el primero, se estudiaron los comportamientos de cada estudiante, el uso dado a Geogebra por ellos, las características cognitivas de cada uno y los obstáculos identificados en sus actuaciones. En un segundo momento se caracterizaron diferentes tipologías de los estudiantes en las tareas propuestas. Dentro de los resultados obtenidos se encuentra el hecho de que el trabajo con Geogebra permite hacer evidentes obstáculos cognitivos preexistentes en los estudiantes y que este software de geometría dinámica favorece la visualización de rutas de solución que difícilmente se manifestarían en lápiz y papel.

En un estudio desarrollado por Ana Kuzle (2012) con profesores de matemáticas en formación se analizaron sus percepciones y reflexiones alrededor de la resolución de problemas en ambientes tecnológicos. A través de este estudio se quería investigar cómo los profesores en formación experimentan el trabajo individual con ambientes de geometría dinámica y cómo esta experiencia afecta su actividad matemática al integrar problemas no rutinarios y ambientes tecnológicos. A través de un diseño de estudio cualitativo se involucraron dos profesores en formación inicial, a quienes se les realizaron entrevistas y grabaciones de audio y video de sus actuaciones al resolver problemas en programas de geometría dinámica. Para llevar a cabo el análisis se tuvieron en cuenta dos momentos: uno donde se analizaban las producciones y protocolos de cada estudiante (inter), y un segundo momento donde se realizaba un cuadro comparativo entre ellos (intra). El análisis realizado en la primera parte fue inductivo, es decir, a la vez que se realizaba el análisis de los datos, categorías y patrones emergían, caso distinto a considerar tentativamente algunos de estos (apoyándose en la literatura existente, por ejemplo), previo al desarrollo del análisis.

Dentro de los resultados obtenidos se pudo observar que para los sujetos involucrados la reflexión en la resolución de problemas permite revisar acciones y decisiones previas antes de proceder a la siguiente etapa de resolución, así como mejorar el aprendizaje mismo a través de las acciones. Este pensamiento reflexivo es fundamento de estrategias metacognitivas. Respecto a la importancia de la geometría dinámica en la resolución de problemas se concluye que esta ofrece rapidez y precisión en los procedimientos, así como procesos particulares. En etapas como la exploración del problema se destaca el uso de la geometría dinámica, también en momentos de conjetura y verificación de resultados; finalmente, el uso de este recurso permitió implementar caminos de solución no accesibles sin el mismo. Se requieren mayores esfuerzos en la fundamentación respecto a las implicaciones pedagógicas y cognitivas de la tecnología, en este caso de la geometría dinámica.

En la propuesta de Sandoval y Moreno (2012) se analizaron las acciones cognitivas que movilizaban los ambientes de geometría dinámica cuando se resuelven problemas de geometría. En su investigación, los autores utilizaron como recurso tecnológico el programa Cabri. La geometría dinámica favorece, aseguran los autores, la representación de objetos geométricos a partir de su construcción -considerando las propiedades que caracterizan al objeto- lo cual dista de una representación en lápiz y papel, en la cual la representación de los objetos carece generalmente de sus propiedades. En la investigación que llevaron a cabo los autores, se consideró un enfoque cualitativo, apoyado en los resultados de la interacción entre los sujetos involucrados y Cabri al resolver un problema. Los resultados del experimento permitieron a los autores asegurar que hay un significado en las producciones de los estudiantes asociado a la forma en que han interiorizado el recurso involucrado; es decir, la implementación de un recurso de tal naturaleza favorece actividades cognitivas en el individuo como la planeación (Santillán, 2002; citado en Sandoval y Moreno, 2012). Igualmente, Sandoval y Moreno concluyen que la intervención de la geometría dinámica promueve una transformación de la cognición previa de forma tal que se produce un conocimiento que no puede evaluarse al margen de esta cognición híbrida, esto es, una dependencia entre el tipo de acciones que se movilizan por parte del individuo y la herramienta que permite desarrollar cada una de estas acciones.

Valencia et al. (2012) identificaron los procesos cognitivos, así como aquellos metacognitivos, que tenían lugar en la resolución de problemas en ambientes computacionales. Su investigación se apoyó en teorías que señalaban la presencia de dos procesos (visuales y conceptuales) involucrados al interactuar en estos ambientes que proveen información relevante en la resolución de problemas. La investigación involucró tres elementos teóricos: uno referido al uso de ambientes virtuales para la resolución; otro enfocado al esquema de razonamiento para la resolución de problemas apoyado en representaciones gráficas; y otro relacionado al procesamiento de información a partir de representaciones dinámicas. La metodología involucró dos momentos: el primero se enfocó en analizar cuantitativamente la comprensión de conceptos en un grupo de estudiantes; la segunda atendió a un análisis cualitativo centrado en los tipos de razonamiento que tenía lugar en la resolución de problemas. El estudio permitió concluir que la resolución de problemas en ambientes de geometría dinámica es importante para la elaboración de modelos mentales, esto posibilita la comprensión y transferencia de aprendizaje de los estudiantes en la construcción de tareas relacionadas con el desarrollo de competencias cognitivas y metacognitivas.

Para Guven et al. (2012) la investigación relacionada con la geometría dinámica se ha enfocado en analizar procesos de conjetura y verificación, dejando de lado asuntos como las estrategias para resolver problemas. Su estudio abordó el uso de la geometría dinámica en la resolución de problemas como una oportunidad para favorecer las estrategias que subyacen a este proceso, estrategias que, de acuerdo a Bjuland (2002; citado en Bjuland 2007), corresponden a razonamientos definidos como procesos interrelacionados de pensamiento matemático, categorizados como dar sentido, conjeturar, convencer, reflexionar y generalizar. En el desarrollo de la investigación, Guven et al. consideraron marcos teóricos que involucraron aspectos propios de la resolución de problemas (*v.g.* recursos, heurística, control); así como aquellos que evidencian las potencialidades de la geometría dinámica en contraposición a los ambientes estáticos mediados por lápiz y papel. La metodología del estudio involucró la solución a un problema propuesto a futuros profesores de matemáticas, en el marco de un espacio académico cuyo objetivo era evidenciar las potencialidades de los computadores en la clase de matemáticas. El estudio permitió concluir que la geometría dinámica provee herramientas heurísticas para la resolución de problemas que no se pueden evocar en lápiz y papel, lo cual es un factor que beneficia el trabajo en este ambiente.

Kuzle (2013a) llevó a cabo una investigación donde estudió los comportamientos metacognitivos que tienen lugar en la resolución de problemas donde interviene la geometría dinámica. Para esta autora, la dificultad de la resolución de los mismos no radica en la falta de dominio de contenidos matemáticos involucrados, más bien, en la carencia de destrezas que deben ponerse de manifiesto al enfrentar estas situaciones. La autora señala que elementos como la seguridad individual y el control del proceso cognitivo (vistos como comportamientos metacognitivos) son esenciales en la resolución de problemas. La autora propuso examinar el concepto de metacognición, enfocándose en la forma en que este se desarrolla en los estudiantes, cómo emerge en el contexto de la resolución de problemas y en qué grado los estudiantes actúan metacognitivamente. En paralelo, esta autora señala que la geometría dinámica ha intervenido en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, aunque no se cuenta con una evidencia contundente respecto al logro de los estudiantes que trabajan con estos recursos. El estudio propuesto pretendía evaluar los patrones de comportamiento metacognitivo que tienen lugar en la resolución de problemas no tradicionales con la ayuda de geometría dinámica. A través de un diseño de estudio cualitativo, la autora exhibió un conjunto de procesos cognitivos y comportamientos metacognitivos que tenían lugar en cada una de las etapas de desarrollo de un problema propuesto.

Respecto a la relevancia de las tecnologías digitales en los procesos de aprendizaje y enseñanza, Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez (2013) discutieron sobre cómo el uso de las tecnologías digitales pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar competencias en el marco de la resolución de problemas. Para los autores la resolución de problemas permite comprometerse en acciones cognitivas que involucran diversos conocimientos que favorecen la comprensión. Igualmente, los autores señalaron que, en el marco de la resolución apoyada en medios tecnológicos, los constructos teóricos que autores como Polya y Schoenfeld han propuesto debían ser modificados de forma tal que atendieran a estos recursos que anteriormente no estaban a disposición. Los autores concluyeron que las estructuras cognitivas se favorecen (se reorganizan) al involucrar recursos tecnológicos, como la geometría dinámica, en tanto que procedimientos como visualizar, conjeturar y utilizar las herramientas del software para apoyar o refutar ideas se privilegian, mientras que en rutinas algorítmicas como las que se realizan en lápiz y papel se dejan de lado. En este mismo sentido, se afirma que se potencia la articulación de conocimientos que en determinado momento pueden ser relevantes, permitiendo construir y operar representaciones de objetos matemáticos, asunto que tampoco es accesible desde el trabajo en ambientes estáticos de lápiz y papel. Además, el estudio desarrollado permitió concluir que estudiantes con bajas habilidades en procesos algebraicos podían acceder igualmente al desarrollo de los problemas a través de su representación geométrica.

A modo de cierre

La revisión literaria presentada, aunque no extensa en el objeto de estudio involucrado, es evidencia del impacto de la geometría dinámica en la resolución de problemas en matemáticas. Se reconoce que en este proceso intervienen aspectos asociados al conocimiento de una persona y la forma en que ese se orquesta para llevar a buen término el proceso de solución. Además, puede apreciarse que los ambientes de geometría dinámica promueven un conjunto de procesos que difícilmente tendrían lugar al trabajar en lápiz y papel, exhibiendo adicionalmente que este tipo de procesos se interiorizan por parte del estudiante y dotan de significado a la herramienta utilizada, de forma tal que esta se convierte en recurso necesario para abordar, bajo una heurística especial, un proceso de resolución y que sin esta difícilmente se lograría un proceso de resolución similar.

La demostración como una instancia de la resolución de problemas

La demostración ha sido considerada como un caso especial de la resolución de problemas (Mamona-Downs & Downs, 2005; citado en Koichu & Leron, 2015) y el proceso de demostración ha sido estudiado adoptando una perspectiva que involucra factores cognitivos y afectivos (Furinghetti & Morselli, 2009). Esta práctica es considerada, en particular, como una instancia de problemas bien definidos (Kim et al., 2013), los cuales se caracterizan por su especificidad en la presentación de la información dada (estado inicial), el logro u objetivo del problema (estado final), los métodos de los que se disponen (operadores) y el espacio de posibilidades (espacio del problema). En este tipo de problemas existe una ruta óptima o deseable desde el estado inicial al final, aunque esta no sea por lo general única. El objetivo de estos problemas radica en establecer una ruta con base en los operadores disponibles que permita realizar un tránsito desde un estado inicial (condiciones dadas) hasta uno final (objetivo del problema). En este proceso tienen lugar procesos metacognitivos como el monitoreo y regulación dado que se requiere recorrer una ruta sin desviarse de los objetivos o metas a conseguir donde además se remuevan obstáculos emergentes (Kim et al., 2013, p. 382).

Consideremos el siguiente ejemplo en el que una demostración debe ser elaborada para justificar que, si M es punto medio del segmento AB (estado inicial), la distancia AB es igual al doble de la distancia MA (estado final). En la Figura 2 se aprecia el recorrido deseable que permite justificar la aserción del enunciado, aunque también se considera un camino no afortunado que, aunque atiende a un desarrollo deductivo adecuado, no permite alcanzar el objetivo del problema planteado, lo que conllevaría en ultimas a un estado de incertidumbre sobre lo que debe realizarse (*WILF, What I'm Looking For?*). Esta situación sitúa un episodio donde un estudiante podría perderse en la ruta de la demostración, aunque no establece relaciones u operaciones incorrectas entre los objetos involucrados. En esta oportunidad, pareciera que no se trazó alguna ruta o borrador del camino a recorrer, o que aun en su recorrido no se dio una revisión y monitoreo del progreso alcanzado en relación a las metas presentadas (objetivo del problema). Finalmente, el diagrama, y en consecuencia la situación planteada, sugiere que tiene lugar un conocimiento de los elementos teóricos, pero que este conocimiento no es suficiente al abordar problemas de demostración, lo que lleva a pensar, en términos de la resolución de problemas, la necesidad de un conocimiento de orden superior que permita monitorear y regular las acciones y conocimiento involucrado.

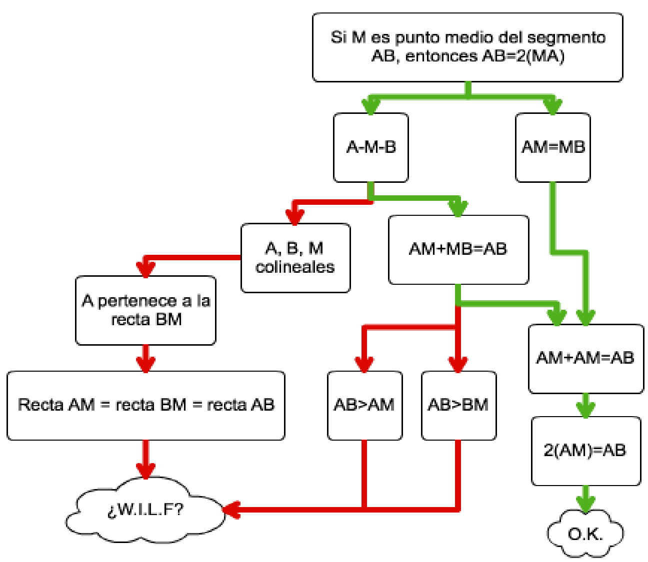


Figura 2. Ejemplo de ruta de demostración y estados del problema (elaboración propia)

En la literatura se han encontrado ya algunas aproximaciones y estudios sobre la relación demostración – resolución de problemas. Tal es el caso de Hanna, quien retomando las ideas de Rav (1999; citado en Hanna, 2001), señala que las demostraciones son vistas como la forma en que los matemáticos exhiben su maquinaria para la resolución de un problema. Por su parte Weber (2005) menciona que en los cursos universitarios de matemáticas la actividad de demostrar puede ser vista como una tarea de resolución de problemas, en la que se solicita al estudiante formular una justificación lógica que demuestre que una proposición dada es verdadera. Marrades y Gutiérrez (2001, p. 88), haciendo eco a otros autores, destacan que una de las funciones de la demostración corresponde a proveer un desafío intelectual a quien se enfrenta a ella (concepción similar a la dada líneas arriba respecto a lo que es un problema), aunque esta función raramente es reconocida por los estudiantes.

Para Weber (2005), el estudio de la demostración desde la perspectiva de resolución de problemas permite situar algunos asuntos importantes que no son considerados desde otras perspectivas (v.g. social, formal, creencias), entre las que se encuentran las heurísticas utilizadas al construir la demostración, los episodios en que no se sabe cómo proceder y las técnicas para enseñar a estudiantes estrategias y heurísticas para sortear estas dificultades. En este sentido, el interés en identificar las causas de la dificultad expresada por los estudiantes al realizar demostraciones ha llevado a que la investigación reporte un creciente número de estudios donde esta práctica se analiza a través del uso de terminología y herramientas teóricas de la resolución de problemas (Koichu & Leron, 2015), incluyendo en estas la interpretación de las actuaciones de los sujetos al afrontar tareas no rutinarias a través de fases y atributos. Marrades y Gutiérrez (2001) manifiestan la necesidad de conocer las concepciones de la demostración por parte de los estudiantes con el fin de comprender sus intentos al momento de resolver problemas de demostración (proof problems[3]).

Dentro de los desarrollos teóricos que se han realizado dentro de la perspectiva de la demostración, como instancia de resolución de problemas, encontramos el estudio presentado en Koichu y Leron (2015), en el que para los autores el modelo emergente propuesto por Carlson y Bloom (2005), el

---

[3] Término acuñado por Polya, el cual refiere a un tipo de problema en que a los estudiantes se les solicita que provean una justificación a alguna aserción, la cual puede ser explícita en el enunciado del problema o debe ser descubierta y formulada en la primera parte de la solución a un problema.

cual involucra distintas propuestas analíticas teóricas realizadas hasta ese momento en torno a la resolución de problemas, es una herramienta útil para analizar las actuaciones de los estudiantes en el proceso de demostración. Koichu y Leron hacen mención a algunos estudios que reportan cómo la dificultad de los estudiantes al momento de realizar demostraciones atiende a factores como la falta de conocimiento estratégico, la carencia de dominio sobre los teoremas o definiciones junto a su utilidad, la ausencia de dominio sobre técnicas de demostración y la interacción entre factores cognitivos y afectivos. A propósito de los factores afectivos, en Kuzle (2013b) se muestra cómo estos aspectos tienen presencia en el proceso de resolución de problemas, cambian en el marco del mismo y guardan relación con el éxito del individuo. Para esta autora, el factor afectivo desencadena una variedad de procesos metacognitivos, tales como la planeación de actividades cognitivas, su monitoreo y evaluación de los resultados obtenidos.

Para Weber (2005), la demostración es una actividad compleja permeada por dimensiones lógicas, conceptuales, sociales y de resolución de problemas, sobre las cuales ya se reportan algunos estudios. Para este autor hay un interés en estudiar la construcción de la demostración como una tarea de resolución de problemas, para ello, él define una tarea matemática como una situación en que al estudiante se le presentan un conjunto de datos iniciales y se le solicita que usando acciones y operaciones matemáticas permitidas obtenga una pieza de información deseada. Bajo esta concepción, de acuerdo a Weber, pueden darse dos tipos de tareas matemáticas:

- El ejercicio, donde es conocido para el individuo el conjunto de acciones a realizar, así como su orden.
- El problema, en la que no es claro para el individuo cuáles acciones deben ser aplicadas, bien porque estas no son explícitas en el enunciado del problema, o porque hay varias formas y caminos que el individuo considera útiles.

En este contexto, la construcción de una demostración corresponde a una tarea matemática, por lo general una de resolución de problema. Sin embargo, generalmente, esta perspectiva no ha sido considerada por los investigadores en educación matemática y tendría un gran valor investigar al respecto, dado el estado de perplejidad de los estudiantes al afrontar este tipo de tareas (Weber, 2005).

Selden y Selden (2013) mencionan que tener algunas ideas para resolver un problema de demostración no equivale a tener la demostración como tal. Hacer el tránsito de argumentos informales, sobre la forma de resolver el problema al ver por qué es cierto un resultado, hacia la producción de una demostración formal puede involucrar aspectos de la resolución de problema significativos (Mamona-Downs & Downs, 2009; citado en Selden & Selden, 2013) y puede convertirse en una circunstancia de frustración para el estudiante. Bajo esta consideración, Selden y Selden señalan la existencia de dos tipos de problemas cuando se abordan problemas de demostración, los cuales no son sencillos, pueden requerir instrucción y práctica y poco han sido investigados en la literatura, estos son: i) resolver el problema en términos de conectar las condiciones dadas en el antecedente con su respectivo consecuente y ii) convertir una solución informal, derivada del primer momento, en una demostración matemáticamente aceptable.

La comparación entre la demostración y la resolución de problemas ha motivado a que algunos modelos involucrados en el estudio de la resolución de problemas se incorporen en el estudio de las acciones de los estudiantes al realizar demostraciones; en particular, las etapas y ciclos que tienen presencia en el proceso de resolución. Koichu y Leron (2015) aseguran que un análisis centrado en estos ciclos permitiría elaborar modelos explicativos de la actividad de los estudiantes al construir demostraciones. Un ejemplo de esto corresponde al estudio llevado a cabo por Furinghetti y Morselli (2009), donde las fases de resolución de problemas propuestas por Polya fueron involucradas en el análisis de las demostraciones elaboradas por estudiantes universitarios dentro de la teoría de números como dominio de conocimiento. Con esta elección de marco de referencia los autores tenían la intención de describir e interpretar los comportamientos de los estudiantes en este tipo de tareas.

Lárez (2014) realizó un acercamiento a la concepción de demostración en geometría y su estrecha relación con la resolución de problemas. Para él, la resolución de problemas involucra algo más que memorizar, repetir y desarrollar tareas rutinarias. Los problemas, a partir de las definiciones ofrecidas por otros autores en quienes Lárez se apoya, se asumen como *situaciones novedosas, donde hay una meta u objetivo que se alcanza a través de la realización de acciones desconocidas de antemano*, esto último es un esfuerzo intelectual. Desde este punto, se establece una analogía con la demostración en geometría, dado que esta última llega a ser novedosa, involucra unas condiciones iniciales y otras a las que debe llegarse a través de un razonamiento deductivo que involucre el uso de las herramientas con las que se cuente. Esta caracterización deja a la demostración, como proceso, lejos de un proceso rutinario y memorístico, se convierte entonces en un ejercicio cognitivo. Bajo estas características, puede considerarse a la demostración como una instancia de problema. Lárez propone un modelo para abordar las demostraciones geométricas que involucra cinco etapas (construcción, información, conjeturas, encadenamiento de argumentos y evaluación o monitoreo). El autor señala que manejar el desarrollo de la demostración (su proceso) involucra en esencia *planificar, monitorear la acción realizada y evaluar los resultados obtenidos,* lo que en síntesis corresponde a promover acciones metacognitivas, aspecto ya referenciado dentro del trabajo realizado al resolver problemas.

La resolución de problemas y su vínculo con la metacognición

El ejercicio de comprender la complejidad de la resolución de problemas llevó en la década de los noventa a que la investigación se enfocara en la habilidad de los estudiantes para involucrar su conocimiento al afrontar este tipo de tareas y las dificultades que podrían emerger (Chinnappan, 1998). Para Cai (1994) la investigación en educación matemática por muchos años ha estudiado los procesos de pensamiento complejo que tienen lugar en la resolución de problemas con el ánimo de comprenderlos. Estos se han enfocado en procesos y acciones cognitivas, en productos cognitivos y relaciones entre acciones y productos cognitivos meramente. Ahora bien, Goos y Galbraith (1996) reconocen el creciente interés sobre el rol de la metacognición en la resolución de problemas matemáticos y el uso de pequeños grupos en el aula de clase como organizador de las interacciones.

La literatura al respecto ha crecido desde los ochenta, enfocándose en las implicaciones para el aprendizaje y la instrucción de los procesos metacognitivos. Erbas y Okur (2012) así como Furinghetti y Morselli (2009) se adhieren a la idea ampliamente compartida de que el conocimiento no es suficiente para que la resolución de problemas ofrezca un resultado adecuado y que se deben involucrar además componentes metacognitivos. La resolución de problemas requiere la implementación de estrategias, aseguran los autores, vistas estas últimas como como una colección de procesos matemáticos dispuestos en el orden en el que se ejecutarán (Frobisher, 1994; citado en Erbas y Okur, 2012). Algunos problemas pueden requerir apenas una estrategia, mientras otros pueden involucrar una colección de estas. Aspectos propios de la metacognición son importantes para la resolución de problemas con el fin de manejar la complejidad del problema y evaluar el progreso hacia los logros (Cox, 2005).

Un estudio llevado a cabo por Chinnappan (1998) permitió determinar que la calidad del conocimiento geométrico construido por los estudiantes tenía una fuerte incidencia en el posterior uso que se diera a este al momento de afrontar la resolución de un problema. En su estudio, los autores reconocieron que estudiantes, tanto con alto como bajo logro académico, podían acceder a contenidos geométricos deseados para el proceso de resolución. Sin embargo, solamente aquellos con alto logro involucraban este conocimiento de manera afortunada, combinándolo con otros conocimientos que permitieran operar los datos suministrados en el enunciado del problema y obteniendo así el resultado deseado. Por su parte, los estudiantes con un logro no alto, aun cuando involucraban el conocimiento que permitiría solucionar el problema, no podían utilizarlo de manera adecuada y optaban por buscar otras rutas de solución, lo cual los llevaba a formular estrategias inválidas y en consecuencia respuestas incorrectas. Este estudio permite reconocer que esta distinción entre los resultados obtenidos por los estudiantes se debe no solamente a su logro académico, sino también a la posibilidad de reconocer en su conocimiento rutas y conceptos útiles, así como aquellos que no permitirían alcanzar la meta trazada. Esto último lleva a cuestionarse la existencia de componentes cognitivos que permitan seleccionar y regular estrategias con el fin de alcanzar un objetivo particular.

Garofalo y Lester (1985) mencionan que la resolución de problemas es una actividad compleja que involucra una variedad de operaciones cognitivas, cada una de las cuales requiere ser manejada y todas estas deben ser coordinadas (p. 169). Según Erbas y Okur (2012), retomando algunas ideas de estos autores, la propuesta de Polya acerca de las cuatro fases de resolución de problemas permite identificar un amplio conjunto de procesos heurísticos que conllevan al éxito del proceso. Sin embargo, en esta propuesta los aspectos metacognitivos se mantienen en un nivel implícito. La resolución de problemas es un proceso complejo que involucra diversas y variadas operaciones cognitivas, entre las que se encuentra la metacognición (Psycharis, Botsari, Mantas, & Loukeris, 2014). Mevarech y Fridkin, apoyados en ideas del NCTM (2000, citado en Mevarech & Fridkin, 2006), reconocen la resolución de problemas como un medio para la enseñanza con significado de las matemáticas y destacan además el desarrollo de estrategias metacognitivas como medio para promover la resolución en los estudiantes. Estudios como el de Karsli (2015) han mostrado que diferentes niveles de metacognición en estudiantes correlacionan con sus resultados en la resolución de problemas, llevando a concluir que altos niveles de desarrollo metacognitivo están fuertemente relacionados con altas capacidades cognitivas en la resolución.

Schneider y Artelt (2010, p. 153) hacen mención al interés generado alrededor de 1980 por parte de los investigadores en resolución de problemas en matemáticas hacia la metacognición. Este grupo de profesionales se cuestionaban por la posibilidad de enseñar a resolver problemas y si la metacognición tendría un rol dentro de este proceso. Para estos autores y otros como Chinnappan y Lawson (1996), Chinnappan (1998) y Panaoura (2012) la investigación en resolución de problemas mostraba que el desempeño en los estudiantes no era adecuado en este tipo de tareas y que por parte de los profesores se reconocía una dificultad para poder diseñar una instrucción que promoviera habilidades asociadas a este proceso, dado que esta no era una práctica tradicional en la escuela. Esto llevó a considerar la metacognición como un camino afortunado para mitigar esta problemática (Schneider & Artelt, 2010, p. 153). Adicionalmente, sobre estas intervenciones tenían lugar cuestionamientos referidos a la posibilidad o no de transferir las estrategias con las que se enseñaba a otro tipo de problemas, distintos a los abordados en clase (Chinnappan & Lawson, 1996).

Chinnappan y Lawson (1996) mencionan la presencia de dos tipos de acciones cognitivas en la resolución de problemas: específicas y generales. Respecto a las primeras, estas pueden verse principalmente como acciones muy particulares dentro del dominio de conocimiento en el que el problema se adscribe (v.g. operaciones matemáticas, resolver ecuaciones), aunque otras podrían llegar a ser transversales en distintos dominios (v.g. elaborar un diagrama, ensayar o verificar algunos casos). Por su parte, el segundo tipo de acciones se caracteriza por influenciar el enfoque y progreso de resolución. En estas últimas se identifican aquellas de naturaleza metacognitiva, esto en cuanto permiten planear algunas acciones, ubicar focos de atención, seleccionar y monitorear actividades y descomponer logros u objetivos en otros más pequeños. Estas acciones tienen presencia en distintos dominios de conocimiento, aseguran los autores. Bajo estas consideraciones, los autores señalan que mientras algunas propuestas de instrucción sobre la resolución de problemas tienen como énfasis algunas de las acciones cognitivas contempladas anteriormente, estas acciones pueden ser diferentes en otras propuestas de intervención, lo que permitiría comprender la dificultad en la comprensión y comparación los resultados de estas distintas propuestas de intervención.

Para Schneider y Artelt (2010), algunos investigadores consideraban que el conocimiento de una persona sobre su propia cognición antes, durante y después de abordar un problema, así como la habilidad de mantener el control de ejecución en el sentido de monitorear y autorregularse deberían tener un impacto positivo en la resolución de problemas. Panaoura (2012), haciendo eco a Schoenfeld, señala que los sujetos que son hábiles en la resolución de problemas se caracterizan por monitorear sus procesos de solución y regular su desempeño afectivo y cognitivo. Igualmente, se consideraba que la posibilidad de tomar decisiones en el marco de la resolución de problemas, escogiendo distintas estrategias cognitivas, por ejemplo, tendrían un efecto favorable en el resultado de este proceso. Finalmente, se contemplaba la insuficiencia de un análisis netamente cognitivo en el desempeño realizado en este proceso, llevando a considerar la metacognición como una herramienta adecuada para comprender la naturaleza del desempeño en este proceso. La investigación que ha realizado Schoenfeld señala que cuando los estudiantes se comprometen en la resolución de problemas, la selección y adaptación de estrategias con base en los resultados de las mismas y la distribución de tiempo para optimizar el desempeño son comportamientos esperados por parte de ellos (Chiu, Jones, & Jones, 2013).

Silver (1982; citado en Garofalo y Lester, 1985) y Cai (1994) aseguran que en la resolución de problemas los análisis realizados se han enfocado en aspectos cognitivos, pero que se requiere ahora analizar comportamientos asociados con la selección de estrategias, el monitoreo cognitivo y la evaluación de procesos cognitivos. Las explicaciones cognitivas de la resolución de problemas se quedan cortas ante fuerzas de naturaleza metacognitiva que tienen presencia allí. Autores como Cai (1994) han desarrollado estudios donde se argumenta la influencia que tienen los comportamientos metacognitivos en la resolución de problemas y el factor determinante de estos en el éxito de este proceso, por encima incluso del conocimiento o las estrategias involucradas. Igualmente, Mayer (1998) expone cómo dentro de la resolución de problemas no solamente el conocimiento tiene un rol preponderante. La revisión literaria realizada por este autor sugiere que adicional al conocimiento (componente cognitivo), aspectos como la metacognición y la motivación juegan un papel importante dentro del conjunto de recursos del estudiante para abordar la solución de un problema. Sin embargo, sobre la metacognición se asegura su centralidad respecto a los otros componentes, dado que con esta se coordinan los demás (p. 51). Para Mayer estos componentes pueden ser promovidos a través de la instrucción.

Aun cuando se reconoce y hay un consenso sobre el relevante rol de la metacognición en la resolución de problemas, para promover en los estudiantes comportamientos metacognitivos y conseguir con ello resultados buenos en la resolución de problemas, se debe primero comprender el concepto en sí mismo adecuadamente, cómo se adquieren este tipo de procesos, cómo emergen en la resolución de problemas y el grado en el que los sujetos actúan metacognitivamente (Kuzle, 2013a, p. 21). Kuzle (2013b, p. 252) señala que la metacognición es necesaria para comprender cómo y por qué una tarea es ejecutada, mientras que la cognición es necesaria apenas para ejecutar la tarea. El panorama presentado hasta ahora corresponde a una revisión en la literatura acerca de la resolución de problemas, sus orígenes y aproximaciones al concepto como tal. Igualmente se ha mostrado que sobre este asunto algunas elaboraciones teóricas han sido realizadas con el ánimo de elaborar modelos de resolución y determinar las habilidades requeridas por parte de los individuos para afrontar este proceso de manera afortunada. Sin embargo, la literatura revisada sitúa un asunto de interés de gran relevancia dentro de la resolución de problemas, este es la metacognición. Esta funciona como un organizador de la actividad matemática de los estudiantes cuando encaran este tipo de tareas en pro de obtener resultados favorables. En lo que sigue se presenta una aproximación al concepto de metacognición y algunas consideraciones sobre el mismo.

METACOGNICIÓN: LA COGNICIÓN SOBRE LA COGNICIÓN

Orígenes y desarrollo

Aunque el concepto de metacognición es investigado e involucrado en distintos campos, su historia es bastante corta (Schneider & Artelt, 2010; Stillman, 2014). Como área de investigación, la metacognición toma su desarrollo en la década de los 70 (Flavell, 1979; Kramarski et al., 2002; Schneider, 2010; Schneider & Artelt, 2010) y desde ese momento ha sido uno de los mayores campos de desarrollo en la investigación cognitiva, considerando a John Flavell como padre de esta línea de investigación (Mevarech & Fridkin, 2006; Papleontiou-louca, 2003; Stillman & Mevarech, 2010). Algunas motivaciones de este dominio de estudio yacen en la ausencia de habilidades, en los estudiantes, para monitorear los fenómenos cognitivos involucrados en el ejercicio de alguna tarea. La investigación en esta área, según Flavell, relaciona la importancia de este factor en los estudiantes para llevar a cabo distintos tipos de tareas, incluyendo entre estas la resolución de problemas.

Aunque en sus orígenes la metacognición estuvo relacionada con dominios como la lectura y tareas de memoria (Goos, 1994; Stillman, 2014), desde 1980 en el campo de la educación matemática este elemento ha tomado relevancia por su posibilidad de analizar con él el desempeño en tareas matemáticas (Stillman & Mevarech, 2010). A partir de ese momento, educadores y psicólogos han estado investigando el rol e importancia de la metacognición en distintos aspectos del desempeño matemático (Callahan & Garofalo, 1987, p. 22). Las investigaciones realizadas a la fecha han mostrado la importancia de la metacognición en la adquisición y aplicación de habilidades de aprendizaje (Psycharis et al., 2014). Kuzle (2013a) señala que la metacognición en la resolución de problemas ayuda a que la persona que afronta esta actividad reconozca la presencia de un problema que debe ser resuelto, cuál es el problema en esencia y comprender cómo alcanzar su solución. Cox (2005, p. 111) asegura que el cuidadoso monitoreo de las actividades cognitivas permite a los humanos controlar no solamente la búsqueda para solucionar un problema, sino también determinar una estrategia efectiva para la resolución del problema abordado.

Autores como Schoenfeld, Garofalo y Lester son reconocidos como precursores en el estudio de la metacognición en matemáticas, particularmente en la resolución de problemas matemáticos (Stillman, 2011; Stillman & Mevarech, 2010). Con base en las interpretaciones realizadas por estos autores tienen lugar distintas y variadas investigaciones que relacionan la resolución de problemas y la metacognición dentro del campo de investigación en educación matemática, elaboraciones teóricas posteriores y algunas propuestas de intervención. Stillman y Mevarech señalan que aun cuando se cuenta con un desarrollo amplio de este constructo teórico, en la investigación en educación matemática los investigadores han recurrido a las ideas originales de Flavell para fundamentar sus estudios (Stillman, 2014). Para estos autores esto no es equivalente a permanecer estancados en una estancia de desarrollo teórico inicial, más bien, esta práctica ha permitido consolidar y expandir las ideas de Flavell de manera lucrativa y construir sobre estas varias investigaciones que permiten igualmente ampliar el conocimiento en esta área (p. 145).

Distintas concepciones del término metacognición han sido establecidas en la investigación (Psycharis et al., 2014), reconociendo en todas ellas una idea central ligada a la propuesta por Flavell y colaboradores (Cai, 1994; Garofalo & Lester, 1985; Goos & Galbraith, 1996; Schneider & Artelt, 2010; Schoenfeld, 1992). Flavell (1976, p. 232; citado en Garofalo y Lester, 1985), presenta la metacognición como:

(i) El conocimiento personal sobre los procesos cognitivos propios y los productos, o cualquier otro aspecto, relacionado a estos; así como
(ii) El monitoreo activo y la regulación y orquestación consecuente de esos procesos en relación a los objetos cognitivos en los cuales ellos yacen, por lo general en función de un logro u objetivo concreto.

Bajo esta definición se hace mención al conocimiento de los procesos de pensamiento personales y la habilidad de controlar, monitorear y auto-regular los comportamientos de aprendizaje personales bajo la intención de alcanzar una comprensión profunda y una resolución de problemas efectiva (Lin & Sullivan, 2008).

Bajo la sombrilla de la definición inclusiva propuesta por Flavell una proliferación de términos metacognitivos se ha descubierto a lo largo de los años (Veenman, Van Hout-Wolters, & Afflerbach, 2006, p. 4). La literatura reporta algunas diferencias en la denominación y definición de metacognición como concepto, encontrando como términos relacionados la cognición ejecutiva, el control ejecutivo, la autorregulación, el meta conocimiento y el conocimiento cognitivo, por mencionar algunos; sin embargo, indistintamente a estas denominaciones se puede reconocer un consenso acerca de la presencia de dos aspectos generales: un dominio cognitivo y una función de monitoreo (Karsli, 2015, p. 36). Karsli, retomando a Flavell, Brown y otros autores, se refiere brevemente al primer aspecto como el conocimiento personal sobre la lectura, memoria y aprendizaje, por su parte el segundo aspecto hace referencia a la planeación, monitoreo y evaluación que proveen control de los procesos cognitivos. La definición presentada arriba permite reconocer estos dos aspectos (conocimiento y regulación). En Callahan y Garofalo (1987) estos dos aspectos se definen como sigue:

- El *conocimiento* de uno mismo como un realizador matemático involucra reconocer fortalezas y debilidades, así como comportamientos típicos y esperados, sumado a la seguridad y confianza sobre estrategias y procedimientos que pueden favorecer el desempeño. Las creencias o conocimiento sobre las matemáticas se incluyen acá, en cuanto este puede afectar el desempeño.
- La *regulación* de la metacognición corresponde a las decisiones que se toman respecto a cómo, cuándo, dónde, entre otras, llevar a cabo alguna acción que permitan explorar un problema, planear formas de abordarlo, actuar en conformidad a estas y revisar el proceso y resultados obtenidos. Esta autoregulación está influenciada por el conocimiento metacognitivo.

La metacognición está asociada con planear, monitorear, evaluar y reparar el desempeño (procesos de monitoreo y regulación en palabras de Karsli (2015)). Estos procesos fueron definidos por Flavell (1976; citado en Karsli, 2015) como estrategias metacognitivas, entendiendo este último término como un proceso regulado usado para monitorear el progreso metacognitivo, alcance de logros cognitivos y control de ejecución en actividades cognitivas (Karsli, 2015, p. 36). Las estrategias metacognitivas orientan a los estudiantes a pensar antes, durante y después de la solución de un problema (Psycharis et al., 2014), verificando su progreso de aprendizaje, planeando y ejecutando cambios en las actividades cognitivas en curso y monitoreando y comparando resultados cognitivos con criterios externos e internos (Karsli, 2015). Para Gourgey (1998, p. 82), la metacognición se define de manera amplia como la seguridad y control sobre el aprendizaje personal, la seguridad de lo que uno aprende, la seguridad de cuándo se comprende o no, el conocimiento de cómo se usa la información disponible para alcanzar un logro y de las estrategias apropiadas según el contexto, las habilidades para valorar las demandas cognitivas de una tarea y la evaluación del progreso. Retomando las palabras de esta autora:

> Mientras las estrategias cognitivas le permiten a uno hacer un progreso -construir conocimiento-, las estrategias metacognitivas permiten monitorear y mejorar el progreso personal –evaluar la comprensión y aplicar conocimiento a nuevas situaciones-. Así, la metacognición es vital para la efectividad cognitiva (p. 82).

Los procesos metacognitivos son internos y supervisan y controlan procesos cognitivos. Dado que permiten planear, monitorear y evaluar el desempeño en la ejecución de tareas, promueven el uso del conocimiento de manera estratégica para desempeñarse eficientemente (Gourgey, 1998, 2001; Psycharis et al., 2014). Algunos ejemplos de los procesos metacognitivos, retomando las palabras de Gourgey, corresponden a clarificar metas o logros, comprender conceptos relevantes, monitorear la comprensión, clarificar confusiones, predecir apropiadas rutas de acción y escoger o proyectar acciones pertinentes. Estos procesos pueden evidenciarse al comparar el trabajo realizado por novatos y expertos al abordar alguna tarea matemática.

Recientes resultados de la investigación en estrategias de instrucción sugieren que el aprendizaje en una disciplina se mejora por guiar a los estudiantes a través del desarrollo de estrategias metacognitivas relevantes (Wosnitza & Volet, 2009; citado en Psycharis et al., 2014). La investigación en educación ha corroborado teorías que afirman la interacción existente entre componentes afectivos, cognitivos y metacognitivos en el aprendizaje. Bajo este panorama, enfoques instruccionales donde se da un papel protagónico al contenido o habilidades discretas ignoran componentes relevantes, reconocidos como valiosos para un aprendizaje profundo, que conlleven a que el estudiante transfiera conocimientos (Gourgey, 1998, 2001). La instrucción matemática, por tradición, se ha enfocado en incrementar el conocimiento matemático de los estudiantes (conceptos y procedimientos), sin embargo no se ha dado el mismo énfasis y tratamiento al comportamiento matemático, esto es, el conocimiento metacognitivo (Callahan & Garofalo, 1987).

Para Schraw y Moshman (1995) la instrucción tradicional favorece un aprendizaje pasivo por lo general, llevando así a la aprehensión de una estructura de conocimiento inerte. Esto último sugiere la necesidad de prestar mayor atención al desarrollo de este asunto en la instrucción. En Callahan y Garofalo (1987, p. 22) se presentan algunas consideraciones al respecto. Sobre este último asunto, Lin y Sullivan (2008) hacen mención a los resultados de la investigación llevada a cabo por Brown (1983, citado por Lin y Sullivan, 2008) donde se precisa que la aplicabilidad de los conocimientos en nuevas situaciones, particularmente en el aprendizaje de contenidos y resolución de problemas, se da de buena forma si los sujetos se han involucrado en instrucciones intencionales donde se favorece la comprensión sobre el cómo, cuándo, por qué y dónde es utilizable la información y estrategias conocidas (p. 281).

Kuzle (2015a) considera, apoyada en Flavell, que el procesamiento cognitivo involucra aspectos cognitivos y metacognitivos. Haciendo eco a las ideas de Flavell, un sujeto desarrolla acciones o estrategias cognitivas para realizar un progreso cognitivo, al mismo tiempo este sujeto desarrolla acciones o estrategias cognitivas para monitorear el progreso cognitivo; a estas estrategias/acciones se les denomina respectivamente estrategias cognitivas y metacognitivas (Flavell, 1981; citado en Kuzle, 2015a). Ana Kuzle señala que los procesos cognitivos hacen referencia al procesamiento y almacenamiento de la información (Kuzle, 2015a), ejemplo de estos procesos son la práctica (v.g. subrayar, copiar), la elaboración (v.g. resumir, parafrasear), la organización (v.g. elaborar un guion) y la ejecución (v.g. cálculos, trazar un diagrama). Por su parte, los procesos metacognitivos tienen un rol de manejo y regulación sobre los procesos cognitivos, permiten manejar el pensamiento propio y tienen presencia como estrategias involucradas por un sujeto para planear su aprendizaje, monitorear y controlar su pensamiento (Flavell, 1976; citado en Kuzle, 2015a). La metacognición, dada su naturaleza, está en un nivel superior al permitir coordinar y manejar el sistema cognitivo, aunque también hace parte de este (Kuzle, 2015a, p. 629). De acuerdo a estas caracterizaciones la cognición está presente en la metacognición, dada su concepción, pero la contenencia recíproca podría o no darse en un acto cognitivo o al menos podría o no ser observable.

Desarrollos posteriores

El reconocimiento de la metacognición como un aspecto relevante y de interés en la investigación ha llevado a que sobre este se realicen interpretaciones, en el marco de estudios en dominios particulares de conocimiento y que el constructo teórico se expanda en función de los mismos

(Schneider & Artelt, 2010). A continuación, se presentan algunas revisiones realizadas que ofrecen un contexto histórico acerca del desarrollo del concepto.

Elementos de la metacognición: la propuesta de Garofalo y Lester.

En el caso de las matemáticas, Garofalo y Lester (1985) señalan que a mediados de los ochenta se contaba con poca evidencia de estudios sistemáticos sobre la metacognición en la educación matemática y el énfasis de los pocos ya desarrollados era examinar la resolución de problemas matemáticos, sus heurísticas y estrategias. Estos autores se enmarcan en la propuesta de Flavell en torno a la metacognición y reconocen que bajo esta misma concepción otras denominaciones dentro del campo investigativo se han planteado. Así mismo, mencionan la existencia de una confusión asociada a lo que podría denominarse cognitivo y metacognitivo. Estos autores mencionan que una forma de ver la relación entre estos corresponde a considerar lo cognitivo como el hacer, mientras que la metacognición correspondería con escoger y planear qué hacer, así como monitorear que se esté haciendo bien. Haciendo referencia a las palabras de Vos (2001; citado en Karsli, 2015), la función de la cognición es resolver problemas y llevar a cabo esfuerzos cognitivos en general, mientras que la metacognición hace referencia a llevar a cabo regulaciones relacionadas con aquellos pasos cognitivos necesarios.

Schraw y Moshman (1995, p. 352), al considerar los aspectos involucrados en la definición propuesta por Flavell sobre metacognición (conocimiento de cognición y regulación de la misma), señalan que estos son comunes a la gran mayoría de interpretaciones sobre este concepto. Sobre estos dos, Garofalo y Lester realizan una descripción con la intención de ofrecer mayores insumos para lograr establecer una distinción entre cognición y metacognición. Esta descripción involucra algunos aspectos señalados por Flavell (1979), al referirse al monitoreo cognitivo como una habilidad deseada en los estudiantes para monitorear los fenómenos cognitivos involucrados al afrontar alguna tarea. Sin embargo, Flavell hace referencia a la presencia de este monitoreo a partir de las acciones e interacciones que tienen lugar entre cuatro fenómenos: conocimiento metacognitivo, experiencias metacognitivas, logros/tareas y estrategias/acciones (Garofalo & Lester, 1985; Stillman, 2011, 2014; Stillman & Mevarech, 2010). Las características de los aspectos mencionados por Garofalo y Lester (1985) y las dadas por Flavell (1979) respecto a los fenómenos que señala, sugieren la existencia de dos elementos dentro de la metacognición, aquellos referidos por Garofalo y Lester como conocimiento y regulación de la cognición, donde el primero se corresponde con el conocimiento metacognitivo declarado por Flavell y el segundo contiene las experiencias metacognitivas señaladas también por este autor. Respecto a los otros dos fenómenos (logros o tareas y estrategias o acciones), estos tienen presencia en los primeros. A continuación, las caracterizaciones de cada uno.

Conocimiento de la cognición (o metacognitivo)

Corresponde a todo lo que una persona conoce sobre habilidades cognitivas, procesos y recursos en relación al desempeño de tareas cognitivas específicas y sus resultados. Para Psycharis et al. (2014) el conocimiento metacognitivo involucra el conocimiento sobre uno mismo como aprendiz y los factores que pueden afectar el desempeño, conocimiento sobre estrategias y conocimiento de cómo, cuándo y dónde utilizarlas. Este conocimiento involucra las creencias del sujeto, conocimiento subjetivo que influencia el resto del comportamiento cognitivo. El conocimiento metacognitivo de las estrategias, conceptos y estados mentales propios permite comprenderse a uno mismo, recuperar información de la memoria y aplicarla en el momento adecuado, reconociendo sobre esta las tareas donde puede involucrarse, sus condiciones de uso y efectividad[4] (Chiu et al., 2013). El conocimiento de la cognición se puede categorizar de acuerdo a si este yace sobre factores como personas, tareas o estrategias en su desempeño, los cuales interactúan entre sí (Stillman, 2011).

- Personas: engloba todo lo que se cree sobre uno mismo y cualquier persona como procesador o ser cognitivo. Estas creencias pueden darse en tres líneas: creencias sobre diferencias intra-individuales, creencias sobre diferencias interindividuales o creencias universales sobre cognición. Respectivamente, a modo de ejemplo, se tienen situaciones donde se cree que uno aprende más a través de la observación que la lectura (intra), que uno es mejor que otro en determinada actividad o aspecto (inter) y que para comprender algo se debe prestar mucha atención o que progresivamente la dificultad en los ejercicios debe aparecer (universal).
- Tareas: engloba el conocimiento sobre las tareas, sus condiciones, requerimientos y características. Este puede darse en dos líneas: información disponible en tareas y demandas de tareas. La primera corresponde a la información disponible para llevar a cabo una tarea, demasiada o escasa, clara o confusa, por mencionar algunas posibilidades. En este primer caso

[4] Chiu et al (2013) consideran que en el caso de las matemáticas un estudiante aprende no solo conceptos y procedimientos sino también cuándo, cómo y dónde aplicarlos.

el conocimiento metacognitivo consiste en reconocer como manejar estas variaciones para obtener resultados exitosos. La segunda corresponde a los logros o demandas de la tarea. En este caso, el conocimiento metacognitivo se corresponde con el reconocimiento de la dificultad o densidad de una tarea, respecto a otra.

- Estrategias: corresponde a reconocer, tener seguridad y saber cuándo utilizar determinadas estrategias, rutas o procedimientos, que permitirán alcanzar logros o sub-logros al afrontar una tarea o un objetivo (resolver un problema, retener información, organizar ideas, entre otras).

Estas tres categorías por lo general funcionan en conjunto, no de manera aislada. Por ejemplo, la relación persona-tarea puede apreciarse cuando se reconoce la dificultad de una tarea o se da preferencia por un tipo especial de ellas; la relación persona- estrategia se da cuando se reconoce y confía en algunas estrategias; finalmente la relación tarea-estrategia se da cuando se concibe que una clase de problemas similares se resuelven bajo el mismo esquema o estrategia. Estas interacciones pueden incidir en la actividad de regulación en cuanto se puede dar mucha o poca confianza a controlar, evaluar, revisar o analizar la forma de abordar un problema. Considere el ejemplo donde un estudiante se reconoce mejor que otra persona para abordar una tarea de un estilo específico, al aplicar una estrategia particular. En consecuencia, el conocimiento metacognitivo puede tener efectos en las tareas cognitivas. Puede este conocimiento apoyar la selección, evaluación y rechazo de tareas cognitivas o de tareas o estrategias a partir de las relaciones con otras ya implementadas o con las habilidades personales.

Regulación de la cognición

La interacción entre los tres conocimientos mencionados anteriormente permite señalar la necesidad de monitorear la comprensión de la tarea y regular el uso de estrategias involucradas. Chiu et al. (2013) consideran que este control metacognitivo se caracteriza por involucrar las habilidades para usar conocimiento metacognitivo y sobre este regular y monitorear el pensamiento y acciones, tomando decisiones cuando sea necesario. Para Psycharis et al. (2014) la regulación metacognitiva es el monitoreo de la cognición propia e involucra actividades de planeación, conocimiento del desempeño y comprensión de la tarea y la evaluación de la eficacia de los procesos de monitoreo y estrategias. Este aspecto de la metacognición concierne a una amplia gama de decisiones y actividades estratégicas en las que uno podría comprometerse a lo largo de una tarea cognitiva o problema. Ejemplo de estas son: seleccionar estrategias para comprender un problema, planear rumbos de acción, seleccionar estrategias apropiadas para llevar a cabo el plan, monitorear la ejecución al implementar estrategias, evaluar los resultados de estrategias y planes y revisar y abandonar estrategias o planes si estos no son productivos.

En este listado también tiene lugar, quizás de manera transversal, las experiencias metacognitivas, considerado por Flavell (1979) como uno de los cuatro fenómenos presentes en el monitoreo cognitivo y para autores como Stillman (2011) como cualquier experiencia concisa, afectiva o cognitiva, que controla o regula la actividad cognitiva. Para Flavell estas experiencias pueden ser extensas o cortas en tiempo y complejas o sencillas en contenido. Pueden ocurrir antes, durante o después de una tarea cognitiva, por ejemplo, considerar que para una tarea de determinada clase se puede incurrir en errores aun sin conocer la tarea en cuestión, o tener la seguridad de haber obtenido un buen resultado en una tarea hecha hace algunos días. Se considera que estas experiencias tienen lugar en situaciones que demandan tratamiento cuidadoso, donde se deben afrontar nuevos retos y deben planear de antemano formas de proceder o evaluar los resultados de dicho proceder. Estas situaciones, dada su naturaleza, favorecen el pensamiento sobre el proceder y el control de las acciones, aspectos suplidos por las experiencias metacognitivas.

Estas experiencias pueden potencialmente afectar los logros o tareas, el conocimiento metacognitivo y las acciones o estrategias cognitivas. Por ejemplo, pueden las experiencias ayudar a abandonar alguna estrategia, dado que en el pasado no fue favorable, lo que puede llevar adicionalmente a plantear nuevos objetivos. Estas experiencias pueden también modificar o eliminar aspectos del conocimiento metacognitivo, al permitirle comparar resultados, estrategias y experiencias al momento de afrontar un problema. De acuerdo a Mevarech y Fridkin (2006), el conocimiento metacognitivo conlleva a utilizar estrategias que a su vez afectarán las experiencias metacognitivas, donde estas a su vez afectarán la adquisición de conocimiento metacognitivo y así en delante de manera cíclica.

Logros y estrategias metacognitivas

Considerados como los objetivos de cualquier actividad metacognitiva (Stillman, 2011). Estos tienen lugar cuando un estudiante se compromete en una actividad, en la cual el conjunto de estrategias y acciones atienden a la consecución de un logro específico. En este sentido, las estrategias metacognitivas corresponden a estrategias que permiten regular y monitorear procesos cognitivos y así alcanzar los logros presupuestados (Stillman, 2011, p. 166).

Una interpretación a cargo de Schraw y Moshman

Para Schraw y Moshman (1995) la regulación y el conocimiento metacognitivo, quienes no son independientes uno de otro, se pueden caracterizar, apoyados en las ideas de Brown (1987; citado en Schraw y Moshman, 1995) y Baker (1991; citado en Schraw y Moshman, 1995), de la siguiente manera:

Conocimiento de la cognición

El conocimiento de la cognición refiere a lo que cada sujeto conoce respecto a la cognición, tanto personal como general. Aun cuando esta definición es similar a la propuesta por Garofalo y Lester (1985), en esta interpretación se involucran tres elementos no idénticos a los considerados por ellos, estos son: conocimiento declarativo, procedimental y condicional.

- Conocimiento declarativo: involucra el conocimiento sobre uno mismo como aprendiz y los factores que influencian el desempeño propio, es el conocimiento de y sobre las cosas. Algunos estudios realizados han mostrado cómo la edad es un factor que incide en el conocimiento sobre los procesos cognitivos relacionados con la memoria; igualmente, los buenos aprendices tienen mayor conocimiento sobre su memoria y tienden a usar mejor su conocimiento con respecto a los aprendices no tan buenos.
- Conocimiento procedimental: corresponde al conocimiento sobre la ejecución sobre procedimientos, el conocimiento sobre cómo hacer las cosas. Un alto grado de este conocimiento implica la ejecución de habilidades y secuencia de estrategias rápidamente, la efectividad en su uso y la diversidad de estas al abordar un problema.
- Conocimiento condicional: se asume como el conocimiento sobre cómo, por qué y cuándo involucrar distintas acciones cognitivas. Podría ser considerado como parte del conocimiento declarativo, al verlo como la utilidad relativa de procedimientos cognitivos.

La literatura ha ofrecido evidencias a la afirmación de que los sujetos habilidosos poseen estos tres tipos de conocimiento respecto a la cognición, lo cual mejora por lo general su desempeño al afrontar tareas.

Regulación de la cognición

La regulación de la cognición refiere a toda actividad que conlleve a controlar el pensamiento y aprendizaje propio. Aun cuando se reconocen distintas habilidades de regulación en la literatura, se pueden destacar tres de estas como presentes en cada interpretación: planeación, monitoreo y evaluación.

- Planeación: involucra la selección de estrategias apropiadas y la distribución de recursos que afectan el desempeño. Ejemplos de esto podrían ser la formulación de secuencias o estrategias, previo a iniciar alguna tarea.
- Monitoreo: refiere a la habilidad personal y en acto sobre el conocimiento de la comprensión y desempeño de la tarea. Involucra esto la habilidad de comprometerse en revisiones personales periódicas mientras se adelanta alguna acción cognitiva.
- Evaluación: refiere a la habilidad de valorar los productos y procesos reguladores del aprendizaje. Se incluye acá la evaluación de los logros y conclusiones personales. La literatura reporta que el conocimiento de la cognición y las habilidades reguladoras se relacionan por la evaluación.

Esta competencia mejora el desempeño en distintas formas, incluyendo acá mejor uso de los recursos cognitivos (v.g. atención), mejor uso de estrategias y mayor conocimiento sobre fallas o estragos (asunto similar al declarado por Flavell en el marco de las experiencias metacognitivas).

Con base en las dos interpretaciones que se han expuesto, se presenta la Tabla 1, donde se sintetizan las posturas de los dos autores en torno a los dos componentes de la metacognición.

	Conocimiento de la cognición	Regulación de la cognición
Flavell	Lo que una persona conoce sobre habilidades cognitivas, procesos y recursos en relación al desempeño de tareas cognitivas específicas y sus resultados. Se incluye el conocimiento sobre estrategias y conocimiento de cómo, cuándo y dónde utilizarlas. Se categoriza en personas, tareas y estrategias, los cuales interactúan entre sí y funcionan en conjunto.	El monitoreo de la cognición propia e involucra actividades de planeación, conocimiento del desempeño y comprensión de la tarea y la evaluación de la eficacia de los procesos de monitoreo y estrategias. Tienen presencia las experiencias de la persona.
Brown	Refiere a lo que cada sujeto conoce respecto a la cognición, tanto personal como general. Se involucran tres elementos no idénticos a los considerados arriba, estos son: conocimiento declarativo, procedimental y condicional. Estos mejoran el desempeño al afrontar tareas.	Refiere a toda actividad que conlleve a controlar el pensamiento y aprendizaje propio. Aun cuando se reconocen distintas habilidades de regulación, se destacan tres de estas como presentes en cada interpretación: planeación, monitoreo y evaluación.

Tabla 1. Dos versiones sobre los componentes de la metacognición (elaboración propia)

Influencia de la metacognición en el conocimiento matemático

Aydin y Ubuz (2010) declararon la existencia de una relación causal entre la metacognición y el conocimiento matemático de los estudiantes. Un conjunto amplio de investigaciones revisadas por los autores respaldó su suposición. Dichos estudios se apoyaron en análisis correlacionales y métodos cualitativos como entrevistas, aunque no se logró reportar el grado en que la metacognición afecta el conocimiento de los estudiantes y si esto tenía lugar de manera directa o indirecta. Para los autores, el conocimiento matemático involucra tipos de conocimiento, como lo son el procedimental (algoritmos), declarativo (definiciones, resultados) y condicional (relaciones e implicaciones). Por su parte, la metacognición se observa a través de dos procesos (conocimiento y regulación de la cognición). En un estudio llevado a cabo por estos autores, se quisieron determinar los efectos o incidencia de los constructos metacognitivos en los constructos del conocimiento. Una revisión literaria los llevó a establecer dos conjuntos de relaciones entre los dos aspectos involucrados.

Relaciones entre aspectos del conocimiento

En primer lugar, se puede mencionar la relación existente entre el conocimiento declarativo, procedimental y condicional. Aydin y Ubuz consideran el conocimiento declarativo como la base o dominio de conocimiento/hechos apropiado por el sujeto; por su parte el conocimiento procedimental corresponde a la compilación del conocimiento declarativo en algoritmos o acciones que permiten transformar y cambiar las variables e información de una situación; finalmente, el conocimiento condicional involucra el acceso a ciertos hechos o al empleo de procedimientos particulares, esto es, proveer un panorama en el cual se establecen conexiones entre distintos hechos. A partir de esto, los autores señalan que el conocimiento de hechos y relaciones permite enfocarse en aspectos relevantes de una situación abordada, bien sean variables, datos o condiciones de la misma. Esto último lleva a seleccionar o generar adecuadas estrategias o procedimientos para resolver problemas o por lo menos transformar la información de la que se dispone.

Por otro lado, el conocimiento de procedimientos o estrategias favorece que elementos claves de estos algoritmos sean observados y seleccionados, promoviendo, entre otras cosas, el análisis, explicación o descubrimiento de hechos y relaciones representados a través de los procedimientos involucrados (v.g. la relación de proporcionalidad entre dos magnitudes inmersas en una ecuación). Finalmente, el conocimiento de hechos para determinar los conceptos nucleares de un problema permite construir relaciones entre ellos y su recuperación, en la adaptación de estos a procedimientos y relaciones existentes, de acuerdo a las demandas de algún problema. Todo esto permite elaborar una idea sobre la incidencia de un tipo de conocimiento en otro, esto es, la relación existente entre el conocimiento procedimental, declarativo y condicional, así como el favorecimiento de uno de estos en virtud del incremento o mejora de otro.

Incidencia de la metacognición en el conocimiento matemático

Ahora bien, respecto a la metacognición, esta se ve bajo la propuesta de Flavell como el conocimiento y control del sistema cognitivo propio. Brown y Flavell concuerdan con involucrar el conocimiento y la regulación de la cognición como componentes de este constructo, donde el primero se caracteriza a partir de categorías como persona, tareas y estrategias (Flavell) o conocimiento declarativo, condicional y procedimental (Brown), mientras que el segundo componente se ve como el uso conciso de estrategias que apoyan la planificación, monitoreo, y control de procesos (Flavell) o el flujo de procesos que se enmarcan en la planeación, monitoreo, selección de estrategias, evaluación y depuración (Brown). Aydin y Ubuz, apoyados en distintas investigaciones, aseguran que la metacognición influye en el conocimiento matemático.

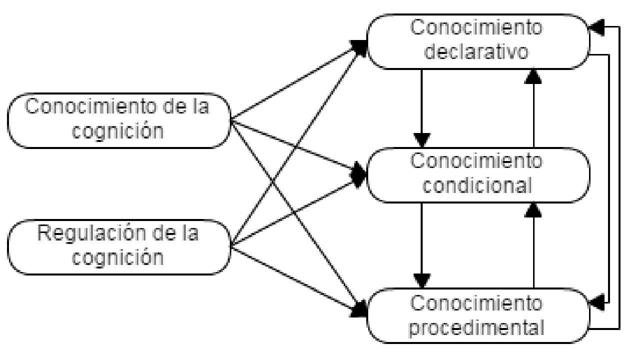


Figura 3. Incidencia metacognición en conocimiento matemático. Tomado de Aydin y Ubuz (2010).

En primer lugar (ver Figura 3), la regulación del conocimiento apoya la configuración de logros y distribución de recursos para reconocer hechos involucrados, a su vez se reconstruyen procesos mentales para explicar el cumplimiento o no de condiciones en relaciones conocidas y se planea y monitorea la selección e implementación de procedimientos. En resumen, involucrar aspectos de la regulación metacognitiva permite que se generen y usen procedimientos correctos, se reconozcan en un problema aspectos relacionados a los hechos de los que se disponen y se revise el cumplimiento de condiciones. Por otro lado, el conocimiento de la información dada en un problema y las estrategias a implementar adecuadas, desencadena que los estudiantes reconozcan los hechos involucrados en este y puedan explicar por qué algunas estrategias pueden ser más útiles que otras. Esto último ayuda a guiar la selección, enriquecimiento y adaptación de estrategias. Lo anteriormente mencionado es evidencia de la influencia positiva entre los componentes de la metacognición y los tipos de conocimiento.

Metacognición e interacción social

Aunque no se le ha brindado mayor atención y en la formulación inicial de la metacognición este asunto no se hacía explícito, la investigación sugiere la existencia de un vínculo entre la metacognición y las interacciones sociales (Lin & Sullivan, 2008), asunto que tomaría una relevancia al considerar las implicaciones en la enseñanza en aula. Retomando las ideas de estos autores, esta relación tiene lugar a partir del interés dado en la investigación a las relaciones sociales y su influencia en el aprendizaje. Bajo esta perspectiva, la creación del conocimiento es vista como una actividad social (p. 291), entre otras razones, porque la interacción con otros actúa como catalizador para el conocimiento y construcción de habilidades, permitiendo que se reconozcan vías de acción y habilidades que en un trabajo en solitario no podrían descubrirse o que podrían considerarse irrelevantes; adicionalmente, la interacción promueve el reconocimiento y discusión alrededor de posturas personales y de aquellas ofrecidas por otros, lo que conlleva a la ampliación del conocimiento metacognitivo personal. Ahora bien, respecto a la metacognición y su relación con el conocimiento social, la literatura, aseguran Lin y Sullivan, reporta una relación simbiótica entre estos dos elementos. La metacognición ha mostrado un efecto positivo en las interacciones sociales, así como algunos tipos de interacción social han mostrado la promoción de habilidades metacognitivas (Lin & Sullivan, 2008).

Respecto a la primera relación, al retomar los cuatro componentes de la metacognición mencionados por Flavell (conocimiento y experiencias metacognitivas, estrategias y logros), se puede mencionar que con base en estos se pueden seleccionar, establecer, evaluar y revisar tareas cognitivas sociales, logros y estrategias, lo que lleva a tomar en consideración las relaciones con otros y los intereses personales en la interacción con pares. También se puede fortalecer la comunicación cuando esta no sea comprensible, ayudando a que ideas y propuestas se comuniquen de forma acertada. El monitoreo del trabajo personal y de los compañeros es otro aspecto a tener en cuenta, asunto que potencia la reducción de bloqueos y obstáculos al afrontar un problema. Respecto a la segunda relación, algunos tipos de interacciones promueven habilidades metacognitivas. Ejemplo de esto es la conformación de grupos donde se promueva la comprensión profunda de algún concepto o el logro de alguna meta compartida. Abordar situaciones problemáticas donde las propuestas de un miembro se sometan a discusión y evaluación permitirá que sobre estas se de una retroalimentación y con ello se promueva la reflexión y posible mejora sobre las propuestas formuladas.

Una dimensión social sobre la metacognición

La investigación inicial realizada sobre el control metacognitivo, quien junto al conocimiento metacognitivo componen la metacognición en términos de Flavell, se enfocó en aspectos individuales de los procesos asociados a este constructo en los sujetos; sin embargo, estudios realizados a finales del 2010 empezaron a involucrar una nueva dimensión sobre este objeto a partir de una connotación de tipo social, reconociendo en este nuevo enfoque la posibilidad de promover un trabajo grupal eficiente al momento de resolver problemas (Chiu et al., 2013). Esta nueva dimensión de la metacognición (control social metacognitivo) se caracteriza como el monitoreo y control del conocimiento, emociones y acciones tanto de uno mismo, como de otros sujetos (Chiu et al., 2013, p. 69). Sumado al control metacognitivo individual, en esta nueva dimensión se reconocen también efectos dados por el trabajo grupal y la influencia social, escenarios donde la resolución de problemas promueve que el monitoreo y control de un sujeto al comportamiento de sus compañeros apoye la exitosa resolución, asunto no visible en el trabajo individual (Chiu et al., 2013).

Chiu et al. (2013) realizan una presentación de esta dimensión social de la metacognición y señalan algunas extensiones sobre la investigación previa en un nivel individual. Los autores reconocen el amplio trabajo realizado por Schoenfeld respecto a la relevancia y papel del control metacognitivo en la resolución de problemas y la insuficiencia del conocimiento cuando se abordan estas tareas por la incapacidad de trazar, seguir o abandonar alguna ruta. Mientras algunos estudiantes enfocan mayores esfuerzos en aplicar formulas y ecuaciones, otros, considerados expertos, se enfocan en comprender la estructura de un problema e identificar cuáles herramientas podrían ser útiles.

Control metacognitivo en el nivel individual: bondades y desventajas

Chiu et al. (2013) reconocen tanto beneficios como desafíos respecto al control metacognitivo en el nivel individual. Respecto a los beneficios, el control metacognitivo apoya el proceso de resolución de problemas y sus resultados, idea compartida por otras investigaciones. La adquisición de conocimiento y recursos relevantes para la resolución promueven a través del control metacognitivo una mejora en las habilidades y éxito de este proceso. En este sentido, un mayor conocimiento metacognitivo promueve un mayor control metacognitivo. Por otra parte, un mayor control metacognitivo puede promover la discriminación y búsqueda de un conocimiento relevante de acuerdo a sus intereses. En consecuencia, el conocimiento y control metacognitivo mutuamente tienen una influencia uno en otro, apoyando así los procesos involucrados en la resolución de problemas. Por otro lado, aquellos estudiantes que ejercen mayor control metacognitivo identifican el conocimiento metacognitivo relevante, adquieren recursos y optimizan el tiempo empleado para la resolución, lo que lleva a estos estudiantes a resolver más problemas aun cuando estos no sean similares a los ya abordados y adquirir así autonomía y satisfacción en el proceso (Chiu et al., 2013), aspecto no evidente cuando hay una limitación a seguir un conjunto de reglas y procesos establecidos por el profesor. Esto lleva a que los estudiantes que ejercen control metacognitivo sean capaces de afrontar distintos tipos de problemas con mayor grado de dificultad, flexibilicen sus estrategias y perseveren en sus intentos, obteniendo en definitivo un mayor logro académico.

Respecto a los desafíos del control metacognitivo en el nivel individual, se debe mencionar la dificultad de algunos estudiantes al involucrar el control metacognitivo, a través de demandas metacognitivas altas y evaluaciones y monitoreo inadecuado, dificultando así el aprendizaje y resolución de problemas (Chiu et al., 2013). Debido a las limitaciones de la mente humana, el control metacognitivo ejercido puede exigir mayores recursos y en consecuencia dejar una mínima parte para afrontar otro tipo de tareas, causando distracción o confusión de la información. Por otro lado, es posible que los estudiantes no estén bien preparados para evaluar adecuadamente su progreso, lo que llevaría a que no se valore efectivamente la planeación y que el monitoreo realizado no sea adecuado, en definitiva, que el seguimiento o abandono de alguna estrategia no sea el correcto o esperado. Vale la pena recordar que una evaluación adecuada es la ruta para la revisión y abandono de estrategias en función de sus aportes en el marco de la resolución de problemas. Bajo este escenario, los estudiantes pueden distribuir inadecuadamente sus recursos mentales, escoger inapropiadas estrategias o no optimizar el tiempo destinado a cada una. Esto se puede reflejar en el trabajo constante y persistente de algunos estudiantes, quienes no abandonan estrategias al resolver problemas aun cuando estas no sean las adecuadas, bien sea porque las han aprendido de memoria, en el pasado eran afortunadas o no pudieron adaptarlas a las nuevas condiciones.

Control metacognitivo en el nivel social: bondades y desventajas

Mientras el control metacognitivo es una actividad individual centrada en uno mismo, el control social extiende este control y monitoreo a un nivel grupal (Chiu et al., 2013, p. 74). En este nivel el monitoreo y control de la regulación y evaluación se realiza también sobre el conocimiento de otros, por ello se involucran aspectos comunicativos y sociales que permean el desarrollo del trabajo y permiten alcanzar los logros presupuestados. El uso de estrategias de control metacognitivo social permite que se comprenda, evalúe y construya en el pensamiento de los compañeros, creando así nueva información que apoye el proceso de resolución. Los procesos metacognitivos juegan un importante papel en el aprendizaje colaborativo, en cuanto ellos mutuamente monitorean y regulan tanto su aprendizaje como actuaciones relacionadas a proveer explicaciones y resolver conflictos cognitivos (Chen & Chiu, 2015). Chiu et al. (2013) señalan, al igual que en el control metacognitivo individual, beneficios y desafíos respecto a este nivel social del control metacognitivo.

Respecto a los beneficios, en primer lugar, puede distribuirse la demanda cognitiva y metacognitiva, esto significa fragmentar una tarea en otras más pequeñas y asignarlas a cada miembro del grupo, con base en las fortalezas de cada uno, dosificando así el compromiso de cada miembro con estas pequeñas tareas y reduciendo las demandas cognitivas y metacognitivas. En segundo lugar, se pueden mencionar la retroalimentación de la que se beneficia el grupo, lo cual se da a través de los aportes de un miembro del grupo, en función de sus habilidades cognitivas y metacognitivas, a los demás integrantes del grupo cuando observa el trabajo realizado por cada miembro, llevando al grupo a ampliar su campo de visión e interpretación del problema, profundizar en los conceptos involucrados a partir de la explicación a sus pares y retroalimentar las propuestas de sus compañeros. Finalmente, otro beneficio atiende al favorecimiento de la motivación, dada por el compromiso con las tareas asignadas, las responsabilidades compartidas y logros y riesgos comunales, que llevan a los estudiantes a desarrollar identidades dentro del grupo, sentir menos ansiedad y mayor comodidad con el trabajo abordado y con ello a motivarse por el trabajo realizado.

Respecto a los desafíos, en este nivel social tienen lugar tanto aquellas dificultades expresadas en el nivel individual, como otras dadas por la interacción que toma lugar al interior de los grupos. En primer lugar, la distribución de responsabilidades a cada miembro del grupo con el fin de reducir su demanda cognitiva y metacognitiva puede conllevar a que no solo se requiera que cada sujeto distribuya sus recursos propios en aspectos cognitivos y metacognitivos, sino que deba destinar otra parte para la atención de los procesos adelantados por otros, en consecuencia, una carga adicional que ayudaría a incrementar las demandas, más que reducirlas. Por otro lado, puede que la retroalimentación realizada a los miembros del grupo no sea la adecuada, aspecto generado por el conocimiento limitado o pobre control metacognitivo individual. Esto último puede llevar a no identificar estrategias inadecuadas o descartar estrategias que aportan al logro del problema. En tercer lugar, se reconoce el estatus de cada miembro del grupo, aspecto que puede darse por reconocer en un miembro del grupo contribuciones mucho más valiosas, lo que puede conllevar a que las ideas expresadas por este sujeto sean consideradas como única verdad y que las propuestas de otro miembro se descarten, bajo el criterio del "experto", aun cuando estas sean afortunadas. En cuarto lugar, se hace referencia a las habilidades comunicativas pobres, aspecto que puede generar que algunas retroalimentaciones o reacciones a las propuestas de algún miembro sean consideradas como ofensivas y el trabajo en conjunto se vea perjudicado. Estas habilidades comunicativas requieren desarrollarse y son de vital importancia en el trabajo conjunto. Finalmente, las diferencias culturales y la diversidad al interior de cada grupo pueden llevar a la no sensibilidad a las diferencias individuales y con ello afectar el control social metacognitivo, dado que aspectos como los asociados al estatus social pueden permear el trabajo comunal.

Finalmente, se reconoce que estas habilidades metacognitivas a nivel social e individual no son desarrolladas de manera natural por los sujetos y que ellos requieren de oportunidades, gestionadas por el profesor, para aprender tales habilidades, practicarlas y recibir retroalimentación sobre las mismas (Chen & Chiu, 2015; Chiu et al., 2013, p. 78). Algunas consideraciones se presentan por los autores al respecto. Chen y Chiu (2015), por ejemplo, llevaron a cabo un estudio donde analizaron el efecto en involucrar guiones o libretos para los estudiantes al resolver tareas en un ambiente colaborativo táctil. Estos libretos apuntaban a desarrollar comportamientos metacognitivos como planear y controlar estrategias para la resolución de problemas. Chen y Chiu encontraron que los estudiantes que recibieron este tratamiento demostraron al final mejor metacognición y logro matemático en tareas de alto nivel, en comparación a los estudiantes que no habían trabajado sobre estos guiones. Para estos autores emplear este tipo de guiones permite estructurar la interacción entre los miembros del grupo, trazando inicialmente una ruta de trabajo para cada miembro y promoviendo así la adopción de comportamientos metacognitivos.

Metacognición y el nivel ambiental

Considerando la metacognición como relevante para el aprendizaje y que esta permite a los estudiantes desarrollar su conocimiento para enseñarse a sí mismos y promover la transferencia de conocimiento a nuevas configuraciones y situaciones, diversas investigaciones se han realizado con el ánimo de mostrar la necesidad de desarrollar enfoques instruccionales que promuevan habilidades correspondientes a este constructo (Kim et al., 2013). Kim et al., apoyados en la conceptualización de Flavell, señalan que la metacognición ha sido definida en un nivel individual (pensamiento sobre el propio pensamiento). Sin embargo, estos autores presentan una conceptualización de este constructo en distintos niveles, siendo el individual apenas el primero de ellos. Esta tipificación de niveles metacognitivos emerge por la consideración de que en el nivel individual el estudiante solamente tiene a recursos internos para monitorear y regular su actividad cognitiva, sin embargo, esto puede llevar a un escenario donde los recursos personales no son suficientes. Los autores proponen considerar el caso de un estudiante que se encuentre bloqueado en alguna instancia de la resolución de un problema, caso donde el estado del estudiante es consecuencia de su forma de pensar, lo que llevaría a cuestionar la forma en que este sujeto podría salir de dicho estado sabiendo que solo cuenta con sus recursos personales y, en consecuencia, ingresaría en un ciclo repetitivo. Bajo esta consideración, Kim et al. (2013) proponen que adicional a los recursos individuales, los sujetos cuentan con la posibilidad de acceder a recursos externos que apoyen el pensamiento metacognitivo. Estos recursos externos pueden verse en otros dos niveles: uno asociado a los recursos provistos por otros sujetos (descrito en el anterior apartado) y los recursos provistos por el ambiente en el cual el sujeto está inmerso. Estos tres niveles, aseguran los autores, pueden tener presencia durante el trabajo colaborativo que se da al resolver problemas y afectan la cognición y metacognición del individuo.

La metacognición en el nivel individual corresponde a la que tradicionalmente se ha contemplado en la literatura, aquella que refiere al pensamiento sobre el pensamiento propio. La metacognición en el nivel social surge como una respuesta en la investigación a la insuficiencia de algunos individuos para sobrellevar, únicamente con sus recursos, las etapas de incertidumbre que pueden afrontar. En este nivel la metacognición se considera como socialmente compartida y se reconoce al grupo como una entidad que persigue un mismo logro (Kim et al., 2013, p. 381). Consideraciones respecto a esta dimensión de la metacognición fueron mencionadas en el anterior apartado y otras similares son presentadas por los autores. Finalmente, la metacognición en el nivel ambiental parte del supuesto de que las fuentes externas metacognitivas no se restringen a la interacción entre participantes en el marco de actividades colaborativas, sino que también el ambiente donde esta interacción toma lugar promueve metacognición. Esta metacognición promovida por el ambiente de interacción apoya tanto la metacognición individual, como la de tipo social. Esto es, retroalimentar y modificar las concepciones de un sujeto o de un grupo, como también servir bajo la figura de referente o recurso de validación de las ideas formuladas por el colectivo. En la investigación presentada en este documento consideramos que en el nivel ambiental bien podrían situarse los programas de geometría dinámica y el efecto de retroalimentación generado por estos. Su naturaleza nos lleva a pensar que la representación gráfica presentada en pantalla, derivada de las acciones de arrastre y construcciones ejecutadas, se convierten en detonante de una evaluación y seguimiento de los resultados y acciones llevadas a cabo.

Algunos antecedentes y resultados

El estudio de la metacognición y su incidencia en la resolución de problemas ha conllevado a que distintos estudios se reporten en la literatura. El campo de la educación matemática no es ajeno a esta tendencia y ya diversos estudios en distintas latitudes se han reportado, situando nuevos asuntos de estudio que permiten perfilar el objeto de investigación que en este documento se quiere documentar. Algunos de estos estudios se presentan a continuación.

Expertos y novatos: implicaciones en la resolución de problemas

Cai (1994) reporta algunos resultados acerca del rol de la metacognición en el desarrollo de tareas cognitivas. Este autor realiza una revisión no muy profunda con la que exhibe resultados superiores por parte de sujetos que demuestran altos niveles de actividad metacognitiva con respecto a aquellos que reportan niveles bajos. Estos resultados también son evidencia de que un alto componente metacognitivo puede permitir altos resultados en la resolución de problemas aun cuando la aptitud matemática sea baja. Citando a Schoenfeld (1985, citado en Cai, 1994), se menciona también que la literatura sugiere que muchas veces la diferencia entre los resultados obtenidos entre distintos sujetos al resolver problemas radica en la forma en que dan uso a sus conocimientos y la eficiencia en el control al resolver el mismo, por encima del conocimiento mismo sobre el tema involucrado.

El estudio de Cai involucró el modelo sugerido por Garofalo y Lester (1985) para estudiar los comportamientos metacognitivos exhibidos por sujetos con experiencia alta en matemáticas y sujetos con experiencia baja en este aspecto, caracterizando sus diferencias a través de los procesos cognitivos contemplados en el modelo involucrado. Bajo esta intención, se pretendía dar continuidad a la propuesta de Garofalo y Lester. Para el desarrollo de la investigación involucraron dos parejas de estudiantes con diferencias marcadas en sus experiencias matemáticas. Una pareja tenía mucha afinidad con el desarrollo de tareas matemáticas, mientras que la otra hacía mucho tiempo no afrontaba este tipo de retos, además sus niveles de formación en matemáticas tenían también diferencias marcadas en función de la profundidad de los contenidos abordados.

Se involucró un problema geométrico que requería determinar la distancia entre dos rectas en un contexto no usual. La elección de este problema atendía a la novedad de la situación para los estudiantes, la posibilidad de enfrentarlo con los conocimientos con que cada uno contaba y porque su desarrollo, en consonancia por lo reportado por Borkowski (1985, citado en Cai, 1994), provocaría comportamientos metacognitivos en su desarrollo, tanto para involucrar su conocimiento previo como para monitorear sus actuaciones. Los individuos fueron instruidos para expresar en voz alta todas sus actuaciones e intenciones, de esta forma se registraron en audio sus comentarios. Esto se complementó con entrevistas a cada sujeto sobre las acciones realizadas, con el ánimo de aclarar aquellos episodios que no fueran muy claros de analizar. Posteriormente se transcribió cada grabación y se utilizó la técnica de análisis de protocolos. Los protocolos se dividieron de acuerdo a la intención del sujeto al resolver el problema y se clasificaron en correspondencia con las cuatro categorías del modelo de Garofalo y Lester (1985).

Algunos de los resultados mostraron que los estudiantes experimentados demandaron mayor tiempo en las fases de orientación y organización con respecto a los estudiantes no experimentados, sin embargo, algo distinto ocurrió con la fase de ejecución, donde este último grupo demandó mayor tiempo. Este resultado se corresponde con otros realizados previamente. También se vio como los estudiantes experimentados confiaron mucho más en sus conocimientos, fueron capaces de descomponer el problema en otros pequeños que aportaban a conseguir el grande, mostraron mayor seguridad sobre lo que querían hacer y como lo querían hacer, ejecutaron acciones en correspondencia a sus planes y evaluaron sus resultados y planes ejecutados acertadamente.

Como conclusión, se rescata la comparación entre expertos y novatos como vía para el reconocimiento de estrategias/mecanismos afortunados de solución de problemas. El estudio realizado señaló la relevancia de los procesos metacognitivos y su influencia en el éxito para resolver problemas. En este caso, al parecer la alta experiencia de uno de los grupos implicó que una frecuencia alta de procesos metacognitivos en este grupo tuviera lugar al resolver el problema, asunto distinto en el otro grupo. Por último, se reconoce la utilidad del modelo propuesto por Garofalo y Lester para estudiar los comportamientos metacognitivos asociados a procesos cognitivos y se ve la importancia de involucrar en ello situaciones problema que se conviertan en reto para los estudiantes.

Trabajo por parejas: promotor de comportamientos metacognitivos

En esta línea de investigación encontramos también el estudio desarrollado por Goos (1994), motivado por la necesidad de comprender por qué los estudiantes fallan al abordar problemas sobre los cuales cuentan con un sólido conocimiento y por qué se mantienen en un esquema/estrategia de trabajo al resolver un problema aun cuando este no sea afortunado. Para la autora, brindar una explicación a este tipo de actuaciones requiere referenciar el concepto de metacognición y apoyándose en ideas de Schoenfeld, señala que el éxito de un estudiante al resolver problemas se da en cuanto este involucre su conocimiento de forma útil y sea capaz de abandonar estrategias no productivas, dando lugar a que la falla en este tipo de prácticas se dé por la toma de decisiones pobres y la perseverancia en rutas no afortunadas. Para Goos es claro que se han dado intentos de instruir a los estudiantes en el uso de procesos metacognitivos, sin embargo, la forma de realizar esto no permite integrar realmente estos procesos en todas las ramas de las matemáticas, por presentarlos únicamente en cursos de resolución de problemas.

El estudio realizado por Goos tenía la intención de describir y analizar los procesos metacognitivos usados por dos grupos de estudiantes al resolver un problema ligeramente familiar para ellos y evidenciar cómo la presencia o ausencia de estos influenciaban el resultado obtenido. Para ello involucró dos sujetos de 16 años y apoyándose en métodos verbales describió los procesos metacognitivos involucrados. Aunque se reconoce que este método ha sido cuestionado por que no ofrece un panorama completo del comportamiento de los sujetos, por la ausencia de explicaciones adecuadas o la presión ejercida por la tarea, se tomó la decisión de conformar parejas para que en su interacción tuviera que verbalizarse el pensamiento de uno a otro, además trabajar en conjunto permitiría aliviar la presión ejercida por la tarea. Adicional a esto se desarrollaron entrevistas y observaciones de clase con el ánimo de cruzar información posteriormente y tener mayores evidencias de las observaciones realizadas. Los problemas propuestos se caracterizaron por abordar temas recientes y presentar alguna dificultad en su desarrollo, lo cual conllevaría a que las actuaciones realizadas involucraran metacognición.

Las grabaciones de audio se transcribieron y se fragmentaron en episodios de acuerdo a comportamientos e intentos en la resolución de problemas propuestos por Schoenfeld (1985, citado en Goos, 1994, p. 147). Adicionalmente, se identificaron momentos de decisión (reconocer nueva información, evaluar resultados y procesos ejecutados) en los fragmentos con el fin de obtener información más detallada sobre los comportamientos de monitoreo en los estudiantes. Finalmente, el grado de presencia de comportamientos metacognitivos se dio a través de la clasificación de cada protocolo en términos de las decisiones que en cada uno se evidenciaron (p. 148).

Entre los resultados obtenidos se encuentra el hecho de que la interacción entre los estudiantes al resolver los problemas tiene incidencia significativa en su proceso de solución. Se reconoce sin embargo que el estudio realizado corresponde al análisis realizado sobre una pareja y esto no permite generalizar los resultados obtenidos. En el trabajo grupal se observó que los estudiantes tenían fortalezas metacognitivas diferentes y complementarias, cada uno exhibió procesos como generar ideas, revisar resultados o apoyar los procedimientos. Esto último apoya la idea de proponer trabajos por parejas y su potencial en el desarrollo y práctica de la autorregulación en la resolución de problemas. Sin embargo, comportamientos como ignorar las propuestas de su compañero, conllevó a no resolver algunos de los problemas propuestos. El autor, apoyado en Forman (1989, citado en Goos, 1994, p. 162), menciona la necesidad de tres condiciones o normas para que este tipo de trabajo sea productivo, a saber: el respeto mutuo, una distribución equitativa de conocimiento y una distribución equitativa en el poder. Esto último deja abierta la pregunta sobre las condiciones que favorecen o entorpecen la autorregulación metacognitiva en el trabajo por parejas.

Impulsividad en la resolución de problemas

El siguiente estudio corresponde al desarrollado por Goos y Galbraith (1996), quienes quieren reportar la actividad de un grupo de estudiantes al resolver un problema de matemáticas, enfocándose tanto en la naturaleza y cualidades de la interacción llevada a cabo como el tipo de estrategias metacognitivas involucradas por ellos. El objetivo de la investigación radicaba en identificar una estructura característica en los intentos de resolución, así como la forma en que afrontaban sus momentos de bloqueo, reconociendo el rol de la metacognición en ello.

Dentro de los referentes conceptuales involucrados por los autores se involucra la propuesta de Flavell sobre metacognición, reconociendo que procesos metacognitivos tales como evaluar el conocimiento personal, la formulación de un plan, la selección de estrategias, el monitoreo y evaluación del progreso son fundamentales en el desempeño matemático al favorecer la elección adecuada de acciones y la distribución de tiempo y energía para cada una, idea tomada de Schoenfeld (1985, citado en Goos y Galbraith, 1996, p. 230). Los autores reconocen que la literatura ha llevado a considerar la idea de que los estudiantes competentes para resolver problemas no solo cuentan con un conocimiento organizado con respecto a los novatos, sino que cuentan también con mayor control sobre el mismo y sobre el comportamiento al resolver problemas. Esto lleva a una nueva dimensión, superior a la cognición, la metacognición.

Se involucraron dos estudiantes de 16 años de secundaria en la resolución de cuatro problemas nuevos en su contenido para ellos, pero cercanos en el tipo de estrategias involucradas. Se adoptó el análisis de protocolos como método para la interpretación de los datos, reconociendo limitaciones que podrían interferir en la fiabilidad de los mismos, pero destacando su potencial servicio al permitir identificar y describir los procesos cognitivos ejecutados al resolver un problema. El trabajo en parejas permitió atender limitaciones de este método como la no completitud de la información y la presión ejercida por el desarrollo del problema. Además, el trabajo conjunto provocó discusiones sobre la validez de alguna propuesta y con ello exponer una reflexión y monitoreo del pensamiento mismo y el del compañero. En consecuencia, esto estimularía la actividad metacognitiva y la haría observable. Métodos complementarios como la entrevista retrospectiva y la observación de clases permitieron contrastar datos para determinar su validez y completar otros cuando se hacía necesario. Finalmente, un cuestionario previo a la implementación del estudio se realizó con el ánimo de determinar sus niveles de seguridad metacognitiva.

Una vez acopiados los datos, se transcribieron las conversaciones y estas se fragmentaron por episodios (intervalos de tiempo en los que un específico tipo de comportamiento toma lugar). Para ello se adoptó la propuesta de Schoenfeld (1985, citado en Goos y Galbraith, 1996, p. 241). El análisis de uno de los problemas propuestos permitió identificar el comportamiento típico metacognitivo de los estudiantes y su estilo colaborativo. En este análisis se identificaron algunos momentos principales en los que se reconoció que hay una tendencia a leer el enunciado del problema e inmediatamente proceder a implementar alguna estrategia, sin evaluar la pertinencia y estructura de la misma. Esto los llevó en todas las ocasiones a fallar en su intento de desarrollo.

Posteriormente tenían que retomar la lectura del enunciado y plantear alguna estrategia, involucrando su conocimiento, para poder tomar alguna ruta diferente. Los comportamientos metacognitivos exhibidos por los estudiantes se dieron al explotar su conocimiento y monitorear su progreso, complementándose en el desarrollo de la tarea, pero dejando de lado algunas oportunidades productivas por la no aceptación de las ideas de un estudiante por parte de su compañero.

Se concluye que el esquema analítico involucrado contiene nuevas características que no solo permiten clasificar las contribuciones de cada estudiante, sino que también permite describir las interacciones entre ellos. Además, la interacción entre ellos se vio permeada no solo por los procesos metacognitivos, sino también por la impulsividad al resolver el problema y la interacción social, donde uno de los estudiantes no siempre validó e involucró las ideas de su compañero. Algunas consideraciones para que esto no ocurra se presentan por los autores (p. 257). Estos elementos perjudicaron la resolución del problema en algún momento.

Resolución de problemas y su naturaleza cíclica

Uno de las investigaciones que mayor atención ha recibido corresponde a la realizada por Carlson y Bloom (2005), quienes realizaron una descripción del comportamiento de 12 matemáticos cuando resolvían problemas de matemáticas. Para los autores, dentro de la literatura, el trabajo inicial realizado alrededor de la resolución de problemas tuvo como foco la descripción del proceso de resolución en sí mismo (v.g. Polya) y en años recientes ha tenido un giro hacia la identificación de los atributos de la persona que resuelve estos problemas para que su resultado sea exitoso (v.g. Schoenfeld). En el ejercicio realizado por estos autores se consideraron distintos estudios realizados con antelación sobre los aspectos que intervienen en la resolución de problemas. Esto les permitió analizar la forma en que estos aspectos tenían presencia en el proceso de resolución y la forma en que se interconectaban, proponiendo así un modelo teórico que involucra tales elementos y muestra el proceso de resolución como un ciclo compuesto principalmente por cuatro fases. Aunque los autores reconocen una pluralidad de aspectos que tienen presencia en la resolución de problemas (ver apartado: una aproximación inicial al concepto), según ellos hace falta hacer mayores esfuerzos en determinar la forma en que estos tienen presencia e interactúan con otros, de ahí la relevancia del estudio llevado a cabo por ellos.

La revisión teórica llevada a cabo por los autores, respecto a los aspectos que intervienen en la resolución de problemas, los llevó a decantar cinco asuntos en particular: recursos, control, métodos, afecto y heurísticas (una descripción de estos aspectos se presenta con detalle en p. 48). Con base en estos se elaboró una taxonomía inicial sobre los atributos que tienen presencia en la resolución de problemas (p. 51), la cual permitiría caracterizar los comportamientos observables por parte de un sujeto al abordar una tarea de esta naturaleza. Para ello, cada asunto considerado está asociado a un conjunto de indicadores que permiten hacer observable el asunto en mención.

El estudio llevado a cabo con los matemáticos se desarrolló a través de la resolución de cuatro problemas de manera individual, donde en compañía de los investigadores se utilizaba la verbalización del pensamiento involucrado para su resolución, pero no se indicaba a los sujetos de estudio el grado de acierto en los procesos utilizados. Los protocolos derivados de esta entrevista fueron codificados a través de la taxonomía elaborada y el proceso de resolución de cada problema a la luz de estas categorías se tomó como objeto de análisis. Aunque este proceso mostró efectividad para identificar, etiquetar y clasificar atributos en el proceso de resolución, el mismo no permitía explicar por completo los patrones de razonamiento y las interacciones observadas (p. 53). Adicional a la identificación de atributos durante la resolución de problemas, pudieron observarse algunos patrones y ciclos a lo largo del proceso de resolución seguido por los sujetos involucrados, lo que llevó a decantar cuatro fases (orientación, planeación, ejecución y chequeo) y con ello a la necesidad de comprender cada una de estas fases, así como los procesos (algunos cíclicos) presentes en cada una.

En la fase de orientación predominan comportamientos como dar sentido a la información y enunciado, organizar ideas y construir una imagen o idea sobre el problema (v.g. realizar alguna representación gráfica, definir elementos desconocidos, construir tablas). Durante la fase de planeación se establecían conjeturas sobre una posible ruta de solución y las herramientas o estrategias necesarias. En esta misma fase tenía lugar un ciclo que permitía a los sujetos evaluar la plausibilidad y aplicabilidad de su método de solución, las micro fases de este son: construir un enfoque para solucionar el problema, proyectar cómo llevar a cabo el enfoque seleccionado y evaluar su viabilidad. De este ciclo se debía obtener como resultado la selección de un enfoque con el cual avanzar a la siguiente fase. La fase de ejecución se caracterizaba por involucrar comportamientos como realizar cálculos o construcciones con los datos con los que se contaba con el objetivo de desarrollar la estrategia seleccionada. En la fase de chequeo se verificaba el resultado obtenido, qué tan correcto era y su relación con lo solicitado en el problema. Se resalta que el tránsito entre estas cuatro fases no era lineal, por el contrario, se observaban ciclos entre estas fases, llevando a los sujetos a retroceder o avanzar entre fases con base en las reflexiones que tenían lugar cuando cada una finalizaba.

Adicional a este resultado, los autores decantaron los atributos de la resolución de problemas estudiados y reportados en su taxonomía que tenían presencia en cada una de las fases identificadas. Sobre este análisis se pudo evidenciar consistencia en los patrones determinados para cada sujeto al abordar el problema, de ahí poder enunciar el rol de cada atributo de la resolución de problemas en cada fase identificada. Esto llevó a los autores a proponer un modelo multidimensional para la resolución de problemas, visto como las fases de resolución que tienen presencia al afrontar un problema y los atributos de este proceso presentes en cada una (ver pg. 66 para una explicación del modelo). Para los autores este resultado, a modo de conclusión, contribuye al campo investigativo al proveer un instrumento útil en futuras investigaciones para analizar y explicar el comportamiento matemático cuando se resuelven problemas.

Metacognición y ambientes computacionales

Algunos de los antecedentes investigativos, a propósito de los procesos metacognitivos, involucran recursos computacionales con la intención de identificar si el trabajo desarrollado en estos ambientes favorece la presencia de metacognición por parte de los estudiantes. El estudio desarrollado por Hurme y Järvelä (2005) es un ejemplo de esto. Particularmente, ellas querían identificar los procesos metacognitivos promovidos por un ambiente computacional donde se daba el trabajo colaborativo entre estudiantes. El trabajo en ambientes computacionales se reconoce por sus inicios en contextos de ejercicios de práctica e instrucción asistida por computador donde se ofrece la oportunidad de construir un conocimiento personal. Sin embargo, las investigaciones recientes han reconocido el aprendizaje como un proceso que se da a través de la interacción con pares. Esto último tiene presencia en la comunicación de ideas y la explicación y justificación del pensamiento propio. Para las autoras, la investigación ha producido información sobre la forma en que un individuo usa conocimiento metacognitivo para tener seguridad de su pensamiento y control de sus acciones cognitivas. El énfasis social dado al aprendizaje de las matemáticas ha llevado a que la metacognición adquiera también una dimensión social, elevándola a un nivel superior respecto a la actividad individual (Goos, Galbraith & Renshaw, 2002; citado en Hurme & Järvelä, 2005).

En el estudio se involucraron 16 estudiantes de último año escolar con altos promedios en matemáticas. El ambiente involucrado permitía a los estudiantes acceder a través de un usuario a una sala de discusión sobre un determinado tema o un problema que debía resolverse, compartir opiniones y discutir frente a las ideas de sus compañeros. Todas las publicaciones realizadas por los estudiantes se acopiaron y se convirtieron en el objeto de estudio de la investigación. En estas publicaciones quería determinarse (a) el análisis del contenido involucrado, (b) el análisis de contenido de la actividad de resolver problemas y (c) análisis de contenido de la actividad metacognitiva. Esto llevó a formular tres momentos de análisis para cada uno de los asuntos considerados, donde la primera etapa involucró 188 publicaciones, la segunda involucró 122 y la última 114.

Respecto a la clasificación dada en el segundo nivel, de interés en nuestra investigación, se tuvo en mente determinar el tipo de conocimiento y pensamiento matemático creado por los estudiantes a través de sus publicaciones e involucró la categorización realizada por Schoenfeld y Polya respecto a la resolución de problemas a través de sus estudios. Ejemplos de cada categoría se presentan con detalle por los autores (p. 55). En el tercer nivel, la clasificación atendió a las ideas desarrolladas por parte de Flavell y Pintrich, Wolters y Baxter. Las clasificaciones dadas a cada uno de las variantes en este nivel se presentan y ejemplifican por los autores (p. 57).

Los resultados del estudio, respecto a cada categoría de análisis, muestran que: (i) respecto al contenido publicado, este se caracterizó en su mayoría por exponer conocimiento matemático, por encima de las otras categorías; (b) todas las fases de la resolución de problemas tuvieron alta presencia, salvo el caso de las creencias, aunque dependiendo del tipo de tarea propuesta en el ambiente computacional, la frecuencia de estas fases podía variar; (c) respecto a la actividad metacognitiva, la división detallada realizada de esta categoría permitió ver cómo procesos del conocimiento metacognitivo y del juicio y monitoreo metacognitivo tuvieron una alta presencia en el trabajo por pares, reconociendo respectivamente en cada uno de estos el conocimiento procedimental y los juicios de aprendizaje (v.g. ¿qué he aprendido?, ¿en qué grado?, ¿qué tanto ha aprendido mi compañero?) como protagonistas.

Para las autoras, a modo de conclusión, sobre el ambiente algunos asuntos requieren ser mejorados, como por ejemplo la limitación de solo poder compartir texto plano y no símbolos matemáticos, lo que llevó a que muchas ideas se expresaran de forma narrativa. Respecto a los procesos metacognitivos evidenciados, algunos de estos fueron protagonistas. En general los procesos asociados al conocimiento metacognitivo tuvieron mayor presencia, asunto dado posiblemente porque en el ambiente la interacción se daba a partir de la comunicación de ideas principalmente y no se requería comunicar el proceso de monitoreo involucrado para la comprensión del problema. Se reconoce que otros métodos como las entrevistas, cuestionarios en línea y grabación de las interacciones permitirían ofrecer mayores insumos sobre los detalles que rodearon los comportamientos metacognitivos evidenciados. De todas formas, el hecho de registrar una alta presencia de estos procesos en este tipo de interacción, es evidencia ya de que la metacognición puede ser vista como un componente de la resolución de problemas conjunta.

Modelando el proceso de resolución y la presencia de metacognición.

Para Yimer y Ellerton (2006) la investigación en resolución de problemas en matemáticas tiene sus orígenes en 1970. Pero apenas una década después tiene lugar un crecimiento considerable en las investigaciones que involucran este aspecto. Sin embargo, muchos asuntos se desconocen sobre este asunto. Al mismo tiempo se reconoce el impacto de la investigación sobre metacognición y su rol en la resolución de problemas, destacando la interpretación que realiza Schoenfled (1985, citado en Yimer y Ellerton, 2006) sobre los procesos metacognitivos, vistos estos como la evaluación del conocimiento propio, la formulación de un plan de ataque, la selección de estrategias y el monitoreo y evaluación del progreso (p. 575). Bajo esta concepción se reconoce la relevancia de estos procesos en la resolución de problemas al permitir controlar los procesos cognitivos involucrados y mejorar el desempeño de los estudiantes en este aspecto. La literatura sugiere, para estos autores, que un gran conjunto de conocimientos es adecuado, pero no suficiente para un exitoso proceso de resolución. De hecho, los autores consideran que la inhabilidad para evidenciar estos procesos metacognitivos es un indicador de habilidades metacognitivas pobres en el estudiante.

Yimer y Ellerton reconocen los ejercicios realizados para poder estudiar sistemáticamente la metacognición, en los cuales procesos metacognitivos se han asociado con el desempeño en la resolución de problemas por parte de los aprendices y donde cada propuesta es una variación de la propuesta de Polya. Estos estudios se han caracterizado por identificar y clasificar estrategias metacognitivas y con base en estos resultados formular propuestas teóricas que establecen nexos entre la cognición y la metacognición. Sin embargo, todas estas propuestas carecen de un componente asociado al desarrollo de comportamientos de monitoreo y regulación en la resolución de problemas. El estudio que realizan estos autores se enfoca en identificar los procesos metacognitivos y sus patrones, empleados por profesores en formación al resolver un problema matemático.

Para el acopio de la información se involucraron entrevistas clínicas basadas en tareas, aplicadas a 17 estudiantes de profesorado que hacían parte de un curso de resolución de problemas. Estas tareas, por ser el medio principal de la información acopiada, debían contar con tres características: (i) involucrar conocimiento conocido por los estudiantes, (ii) debían representar un reto para los estudiantes y (iii) no debían ser rutinarios. Posterior a estas entrevistas se realizó una transcripción de los audios registrados y en estos se identificaron orientaciones, procesos de solución y características en cada estudiante. Algunas consideraciones particulares sobre estos resultados son mencionadas por los autores (p. 577). Comparar los resultados obtenidos permitió identificar cinco fases en las actuaciones al resolver problemas: compromiso, formulación-transformación, implementación, evaluación e internalización. Para cada una de estas fases se observaron también actuaciones cognitivas y de estas fases se pudo corroborar su presencia en todos los intentos de resolución del problema, aunque no necesariamente todas de manera simultánea.

En los análisis realizados se pudo observar que el tránsito de una a otra fase se da a partir de la lectura del enunciado del problema, lo que en palabras de los autores corresponde a reconocer esta actuación como un catalizador para las decisiones metacognitivas y la forma de proceder (p. 580) dado que permite reconocer si se ha tenido en cuenta toda la información relevante suministrada por el problema. Por último, se pudieron reconocer distintas rutas trazadas entre estas fases, algunas cíclicas inclusive. Esto último depende de las características del sujeto.

Como conclusión, se reconoce la importancia del modelo propuesto en cuanto este pone de manifiesto la relación entre la cognición y la metacognición a través de la consideración de algunos procesos metacognitivos dentro de cada fase cognitiva. Así mismo, se reconoce que, a diferencia de otras propuestas, este modelo involucra la reflexión en cada una de las fases e involucra una fase denominada internalización, donde se puede observar la profundidad con la que un sujeto resuelve el problema en términos del rigor, elegancia y extensión.

Metacognición en resolución de problemas

Erbas y Okur (2012) llevaron a cabo una investigación con estudiantes de preparatoria con la intención de investigar las estrategias y episodios de la resolución de problemas, así como la metacognición exhibida por ellos al abordar este tipo de tareas. Estos autores reconocen la relevancia de la resolución de problemas como medio para la comprensión profunda de conceptos matemáticos. Sin embargo, se debe mencionar que los estudiantes son instruidos en la repetición y memorización de rutinas, llevándolos a que no puedan afrontar adecuadamente problemas no familiares y que actuaciones como la verificación de resultados se omita, por considerar que las acciones realizadas son garantía de la validez del resultado. Para los autores es relevante que adicional al conocimiento matemático se involucren aspectos metacognitivos para la afortunada resolución de problemas. Ellos consideran que llevar a cabo una investigación en la que se involucren estos elementos conceptuales permitiría identificar los motivos por los cuales algunos estudiantes fracasan al resolver problemas. Ya algunas investigaciones han indagado estos motivos al comparar los procesos adelantados por estudiantes experimentados y no experimentados en resolver problemas. Aun así, los resultados obtenidos son apenas aproximaciones que ofrecen una idea sobre los motivos de ello y muchos asuntos por comprender aún se mantienen.

Con la intención de investigar las estrategias de resolución de problemas, los episodios que tienen lugar en este proceso, la metacognición exhibida por estudiantes y la interacción entre estos elementos al resolver un problema, se involucraron cinco estudiantes de Turquía de preparatoria con distintos niveles de desempeño académico, dados sus resultados académicos. A través de un estudio de caso se analizaron en detalle las estrategias involucradas por los estudiantes en función de los intereses de los autores. En este sentido, se involucraron entrevistas clínicas y producciones escritas. Los problemas propuestos a los estudiantes se ajustaban a los requerimientos expuestos por Goos y Galbraith (1996). Para el análisis de la información se tuvieron en cuenta las propuestas de Posamentier y Krulik, Artzt y Armour-Thomas y Pappas et al., las cuales permitirían identificar las estrategias de resolución de problemas, los episodios de tal resolución y la metacognición involucrada respectivamente (p. 94).

Los resultados obtenidos mostraron que, respecto a las estrategias incorporadas por los estudiantes, aquellos que tuvieron un buen, regular y bajo desempeño en la resolución de problemas fueron aquellos con altos, medios y bajos resultados académicos respectivamente. Así mismo, algunas estrategias fueron o no afortunadas en la resolución de un problema específico dependiendo de la persona que las involucrara. Esto significa que la elección de una estrategia afortunada al resolver un problema no garantiza su efectividad para la obtención de un resultado. También se pudo apreciar que aquellos estudiantes que involucraban en un problema distintas estrategias eran más cercanos a obtener un resultado adecuado que aquellos que se limitaban en el número de estrategias incorporadas. Respecto a los episodios de resolución, se vio que una resolución afortunada no requería que todos los episodios se involucraran y estos podían presentarse en un orden no necesariamente lineal y en reiteradas oportunidades para el mismo problema. Algo particular que se evidenció fue que aquellos estudiantes que no eran capaces de explicitar sus pasos de resolución eran aquellos que no obtenían un resultado afortunado. Esto es, la inseguridad o ausencia de expresión del pensamiento se convierten en un buen símbolo o indicador de un posible fracaso en la resolución. Finalmente, aunque se da un papel relevante a la verificación dentro de la resolución de problemas, este aspecto no es evidente por parte de los estudiantes.

Metacognición y resolución de problemas en ambientes de geometría dinámica

Uno de los antecedentes investigativos más cercanos a la propuesta de investigación que se pretende desarrollar en este documento corresponde a la investigación realizada por Ana Kuzle (2011, 2013a), en el marco de su tesis doctoral. El estudio llevado a cabo por esta autora tenía el objetivo de identificar y analizar los procesos metacognitivos exhibidos por profesores en formación de matemáticas al resolver un problema en ambientes de geometría dinámica. Para la autora hay un consenso en la comunidad de investigación respecto al rol relevante de la metacognición y la tecnología en la resolución de problemas y prueba de ello es el gran número de investigaciones realizadas hasta ese momento. Sin embargo, no se han realizado estudios donde se involucre la geometría dinámica como recurso tecnológico en la resolución de problemas y se analicen los procesos metacognitivos involucrados.

Kuzle propuso un modelo teórico que involucra elementos de Polya y Schoenfeld para el estudio de los procesos metacognitivos. Este modelo involucraba los siguientes episodios: leer el problema, comprender el problema, analizar lo que se necesita hacer, explorar diferentes posibilidades, planear la mejor solución, implementar el plan y verificar si la respuesta es solución al problema, todo esto junto con las transiciones entre cada par de episodios. Para el acopio de datos se tuvieron en cuenta las grabaciones de video del trabajo realizado, entrevistas clínicas, hojas de trabajo, los reportes verbales de su trabajo y las observaciones del investigador; todo esto alrededor del trabajo de dos profesores en formación de matemáticas que ya habían cursado un semestre universitario.

Los resultados del análisis sobre cada episodio, en función de los procesos metacognitivos evidenciados, permitieron observar que de acuerdo al episodio en el que los estudiantes se involucraban tenían lugar estrategias y comportamientos particulares, así mismo, la regulación y conocimiento metacognitivo favorecieron la aparición de comportamientos específicos que apoyaron la resolución del problema. En estos comportamientos se reconoció la relevancia del software de geometría dinámica como una herramienta de apoyo. El conocimiento geométrico de las funciones del software, la experiencia al resolver problemas, factores afectivos y la perseverancia se consideraron fundamentales en el éxito al resolver el problema. Cuando acciones cognitivas estabas desprovistas de un monitoreo cognitivo apropiado, los esfuerzos realizados no eran afortunados; igualmente, enfocar el trabajo en direcciones productivas involucraba el uso de acciones metacognitivas. En consonancia con otras investigaciones, el estudio de la metacognición no debe realizarse de manera aislada, por el contrario, deben integrarse constructos afectivos, los cuales también permean la resolución de problemas. Otras consideraciones son planteadas por la autora a modo de conclusión para comprender la naturaleza y relaciones entre los procesos cognitivos y metacognitivos.

Un modelo de la resolución de problemas en ambientes de geometría dinámica

El interés por estudiar los comportamientos metacognitivos de profesores en formación de matemáticas al resolver problemas de matemáticas en ambientes de geometría dinámica llevó a Ana Kuzle (2015a) a estudiar la presencia de estos y comprender qué situaciones, circunstancias e interacciones en este ambiente computacional promovían estos comportamientos. Kuzle señala que la enseñanza de las matemáticas ha dado un énfasis hacia el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas dado el favorecimiento de un aprendizaje profundo y con comprensión a través de este proceso; sin embargo, el desempeño de los estudiantes en este tipo de situaciones está por debajo de lo esperado, asunto que según reporta Schoenfeld, Garofalo y Lester, por mencionar algunos, guarda estrecha relación con una carencia de comportamientos metacognitivos.

Para Kulze, el uso de la tecnología tiene implicaciones favorables en la resolución de problemas, situación presente también con la geometría dinámica. Aun así, no se han reportado estudios que indaguen por los procesos metacognitivos favorecidos por la geometría dinámica, a propósito de la resolución de problemas en estos ambientes. La investigación realizada por esta autora permite, en consecuencia, ampliar el campo teórico en relación a la metacognición y su presencia al resolver problemas en ambientes de geometría dinámica. Para su desarrollo se involucró una versión extendida de la definición de Flavell contemplada por Wilson y Clarke en el 2004, la cual se enfocaba en tres componentes metacognitivos que permitirían distinguir entre procesos cognitivos y metacognitivos: conciencia, evaluación y regulación. Para Kuzle la definición de Flavell solo involucra el tercer componente y desconoce los otros dos. Respecto a la resolución de problemas, la autora, apoyada en propuestas de Polya, Garofalo, Lester y Schoenfeld, propone un modelo que captura comportamientos cognitivos y metacognitivos al trabajar en ambientes de geometría dinámica, así como su interacción compleja. Kuzle (2015a, p. 631) presenta una descripción de este modelo, a través de sus fases, en correspondencia con la siguiente figura.

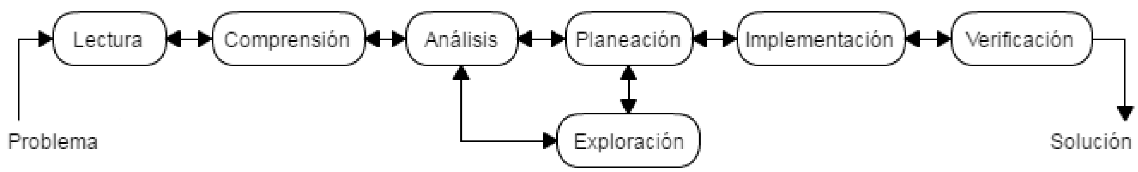


Figura 4. Marco teórico cognitivo-metacognitivo. Tomado de Kuzle (2015a).

Por otro lado, para investigar e interpretar la interacción de los estudiantes con la geometría dinámica la teoría de la instrumentalización fue involucrada, esto permitiría comprender la integración de la tecnología en la resolución de problemas y la influencia del estudiante sobre esta, así como la influencia que podría darse desde la geometría dinámica hacia el estudiante.

En términos metodológicos, se implementó un estudio de caso con un profesor de matemáticas en formación, quien resolvió problemas de geometría con ayuda de un programa de geometría dinámica. Los datos acopiados involucraban entrevistas, grabaciones de los protocolos, producciones escritas y notas de los investigadores. El análisis de los datos se realizó a partir de la fragmentación de los protocolos a través de episodios descritos en el modelo propuesto por la autora. Igualmente, se determinó si los comportamientos propios de cada episodio eran promovidos por la geometría dinámica o si estos tenían una influencia en el uso del software. La naturaleza metacognitiva de los mismos se determinó a través de la propuesta de Wilson y Clarke. Por último, para dar cuenta de la influencia del software en el proceso de resolución, las interacciones del estudiante con este recurso se clasificaron de acuerdo a los componentes de la teoría de la instrumentalización, a saber: instrumentación e instrumentalización. Algunos ejemplos de los códigos asignados a todos estos elementos en el análisis de los datos se presentan por la autora (p. 635).

Los resultados del estudio realizado mencionan el uso y relevancia del software en el proceso de resolución y cómo el conocimiento sobre este y sus herramientas afectaron la forma de involucrarlo, así como sus intenciones. Los procesos metacognitivos involucrados se dieron por el uso del software. Respecto a los componentes metacognitivos propuestos por Wilson y Clarke se observó que estos se relacionaron con acciones como la atención selectiva, la planeación para efectivos enfoques, el monitoreo del progreso y la regulación de errores. Se muestra que la interacción entre comportamientos cognitivos y metacognitivos fue fundamental para el exitoso proceso de resolución. Esta interacción es la que lleva a que distintos episodios de la resolución de problemas tengan lugar. El estudio realizado extiende los resultados investigativos sobre la metacognición en la resolución de problemas, al integrar recursos como la geometría dinámica. A propósito de la tecnología, se ve como esta favorece acciones y procesos no accesibles cuando no se cuenta con ella y en consecuencia una variedad de comportamientos cognitivos y metacognitivos particulares (v.g. arrastre, medición, construcción). Por último, se evidencia que no todos los comportamientos metacognitivos condujeron a actividades de resolución productivas. Esto último abre la puerta a considerar y estudiar aspectos no productivos de la metacognición en el marco de la resolución de problemas. En cada fase de la resolución de problemas los estudiantes exhibieron comportamientos metacognitivos y a su vez la geometría dinámica promovió estrategias no presentes en ambientes estáticos.

SÍNTESIS

La revisión presentada en este segundo apartado complementa la idea desarrollada en el apartado de resolución de problemas. La revisión literaria acerca de la metacognición, como campo de investigación permitió conocer sus orígenes y motivaciones que hicieron que este constructo se relacionara con la resolución de problemas, vista esta relación como una de orden explicativo al intentar comprender las razones por las cuales la resolución de problemas no es exitosa en los estudiantes. Distintas interpretaciones se han elaborado alrededor de este constructo y algunas ampliaciones del mismo se han formulado (v.g. metacognición en niveles individuales, sociales y ambientales). Su estudio, en conjunto a la resolución de problemas, ha permitido plantear algunos dispositivos analíticos cuya intención es caracterizar los comportamientos de estudiantes cuando afrontan este tipo de tareas matemáticas, reconociendo allí los motivos por los cuales no se da un desarrollo exitoso al proceso de resolución o simplemente el éxito depende de diferencias individuales generadas por la experticia de algunos individuos. Dentro de estas propuestas de investigación se pudo reconocer un único autor que ha indagado por la metacognición dentro de la resolución de problemas matemáticos al incorporar geometría dinámica, asunto cercano al que se pretende desarrollar en este documento; sin embargo, aun en esta propuesta de investigación los problemas contemplados no corresponden a problemas de demostración, asunto que sustenta la pertinencia de realizar un estudio de los procesos metacognitivos presentes en la resolución de problemas de demostración cuando intervienen programas de geometría dinámica.

MARCO TEÓRICO

Presentamos en este capítulo los asuntos teóricos sobre los cuales versa la investigación realizada y presentada en este documento. En un primer momento se adopta una postura acerca de la resolución de problemas y los problemas de demostración en geometría, dado que son este tipo de problemas los que involucraremos en este estudio. En un segundo momento se presenta la metacognición, características de este constructo teórico y extensiones del mismo como lo son la metacognición en el nivel social y ambiental. Al final hacemos una presentación de la demostración y la geometría dinámica, reconociendo las bondades de este recurso en el proceso de demostración y algunos asuntos no tan afortunados que deben tenerse presentes.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y PROBLEMAS DE DEMOSTRACIÓN

En el anterior capítulo realizamos una aproximación al concepto de Resolución de Problemas, apoyados en una revisión literaria que no pretendía ser exhaustiva pero sí quería permitir un acercamiento al concepto en cuestión, reconociendo su historicidad, instrucción en la escuela, los modelos que sobre este proceso se han formulado, la presencia de la resolución de problemas en la geometría dinámica y su estrecha relación con la metacognición. En esta oportunidad puntualizamos algunos asuntos a propósito de este concepto, consolidando una definición y algunas consideraciones a tener en cuenta.

Problemas y ejercicios: una distinción

Una situación problema es definida normalmente como una situación que no puede relacionarse inmediatamente con un conocimiento matemático que juegue un rol importante en la solución final (Nunokawa, 2010). Esto es, la situación problema no puede ser resuelta inmediatamente por aquel quien la afronta, así como tampoco debe conocer algún mecanismo o conjunto de acciones conducentes a su desarrollo. Esto lleva a invertir tiempo en el análisis de la situación abordada y usar heurísticas que permitan trazar una ruta de solución (Nunokawa, 2010). Debe señalarse que la validez de una solución atiende a factores sociales, dados por las normas que al interior de una comunidad se establezcan (Ernest, 1997 & Yackel, 2001; citados en Nunokawa, 2010). Las heurísticas, en consonancia con Koichu et al. (2006, p. 458), las asumiremos como una *orientación sistemática para la representación, análisis y transformación de los problemas matemáticos*, usadas por los individuos que abordan esta tarea para la planeación y monitoreo de sus soluciones. Estas pueden ser específicas o generales a un dominio de conocimiento y pueden promover una estrategia general de resolución o apenas un pequeño avance en el proceso.

Adoptar una postura frente a la resolución de problemas conlleva a involucrar otros términos asociados, los cuales sitúan este asunto en relación a otros comúnmente utilizados en la literatura. Inicialmente, de acuerdo a Weber (2005), consideramos la *tarea matemática* como una situación en que al estudiante se le presentan un conjunto de datos iniciales (por lo general en el enunciado de la misma) y se le solicita que, usando acciones y operaciones matemáticas permitidas, obtenga una pieza de información deseada, aunque las acciones requeridas en este punto no sean explícitas para el estudiante. Weber, en este punto, considera dos tipos de tareas matemáticas:

- El ejercicio: donde es conocido para el individuo el conjunto de acciones a realizar, así como su orden. Por lo general, situaciones donde se repiten procesos algorítmicos o donde de manera explícita se indica la forma de operar con los datos que se brindan a través del enunciado.
- El problema: en la que no es claro para el individuo cuáles acciones deben ser aplicadas, bien porque estas no son explícitas en el enunciado del problema, o porque hay varias formas y caminos que el individuo considera útiles.

Esta discriminación guarda una semejanza con la dada por autores como Duffield (1991) y Schoenfeld (1992), quienes señalan además que cuando un problema ha sido resuelto, todos aquellos que se asemejen a este serán rutinarios, convirtiéndose en ejercicios dado que no hay un aprendizaje que tome lugar en su resolución. Una condición importante para que una tarea matemática sea considerada como problema, es el desconocimiento por parte de quienes la enfrentan, esto es, no saber cómo responder a tal situación (Schoenfeld, 1992).

**Elaborar un diagrama de tareas y ejercicios vs problemas

Problemas de demostración

Dentro de esta perspectiva situamos la demostración como una instancia de problema, denominando este tipo problemas como *problemas de demostración,* conservando con ello la idea propuesta por Polya al referirse a estos como una clase de problemas en que los estudiantes deben proveer una justificación a alguna aserción, explícita en el enunciado del problema o descubierta y formulada como parte de la tarea. Particularmente, aquellos problemas donde se provee una situación problema que se debe explorar y sobre esta se deben formular conjetura y su respectiva justificación, hacen parte de este tipo particular de problemas. Establecer una demostración involucra el reconocimiento de unas condiciones iniciales y un resultado a obtener con base en estas premisas, construyendo un camino donde se avance desde el estado inicial del problema (datos o premisas) hasta un estado final del mismo (proposición a demostrar), transitando por estados intermedios que tendrán lugar gracias al uso de elementos pertenecientes a un sistema teórico de referencia a través de un razonamiento deductivo (Perry, Samper, Camargo, & Molina, 2013). De acuerdo a Weber (2005), esta perspectiva no ha sido considerada por los investigadores en educación matemática, por lo menos no con profundidad, aun cuando tendría gran relevancia estudiarla dada la dificultad de los estudiantes al afrontar una tarea de esta naturaleza.

En el trabajo que se desarrolla alrededor de la resolución de problemas es esperado que se genere nuevo conocimiento (v.g. relaciones, propiedades) que permitirá ampliar y profundizar sobre el conjunto de datos que sobre la situación abordada se conocen y sobre la situación misma, aun cuando estos no conduzcan a la solución esperada (o demostración, cuando el problema es considerado como uno de prueba). Es en este punto que la profundidad en la comprensión que se pueda generar sobre un problema influenciará las acciones de exploración y estas últimas movilizarán nuevas formas de exploración, concluyendo así que existe una interacción entre la exploración y comprensión en la resolución de problemas matemáticos (Nunokawa, 2010).

Episodios de la resolución de problemas

Aun cuando se han elaborado distintos modelos acerca de la resolución de problemas (ver Anexo 2), en este documento adoptamos la propuesta elaborada por Ana Kuzle (2011, 2013). El motivo de esta elección atiende a la afinidad del trabajo realizado por esta autora al describir el proceso de resolución de problemas en los que media la geometría dinámica. Sin embargo, esta aproximación no ha contemplado el trabajo realizado alrededor de problemas de demostración, componente particular del estudio presentado en este documento. El modelo de Ana Kuzle involucra siete episodios presentes en la resolución de problemas de matemáticas en los que media la geometría dinámica y sobre los cuales se puede establecer una relación con comportamientos metacognitivos (ver Figura 5).

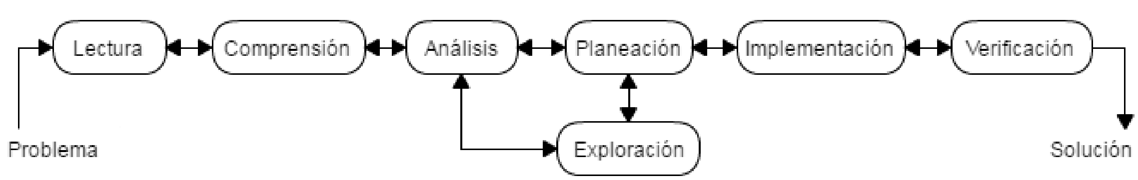


Figura 5. Episodios de la resolución de problemas (Fuente: Kuzle, 2015a)

Aun cuando el modelo sugiere una trayectoria lineal, las investigaciones realizadas que se apoyan en la propuesta de Schoenfeld (Artzt & Armour-Thomas, 1992; Carlson & Bloom, 2005; Kuzle, 2013a; Schoenfeld, 1985) y otras, en las que se proponen otros modelos para la resolución de problemas, señalan que el recorrido por estos episodios puede darse de forma cíclica, repetitiva o incluso omitir algunos episodios. Los episodios involucrados en el modelo son presentados en Schoenfeld (1981) originalmente, e interpretados y complementados por Artzt y Armour-Thomas (1992) y Kuzle (2015a), como fundamento teórico de sus investigaciones. Una descripción de estos se presenta a continuación.

Episodio	Descripción
Lectura	Este episodio tiene lugar cuando un sujeto inicia a leer el enunciado del problema en voz alta. Esto incluye el reconocimiento de las condiciones del problema, la verbalización de las partes del enunciado y momentos de silencio que podrían llevar a una lectura mental, que indicaría contemplación del enunciado del problema, o pensamientos en blanco.
Comprensión	Este episodio engloba los intentos de un sujeto por clarificar el significado del problema, sus partes y la relación entre estas. En este episodio se identifican los logros u objetivos del problema, este se representa y se evalúa el conocimiento personal respecto al requerido por el problema.
Análisis	Cuando no hay una forma aparente de proceder después de haber leído el problema, tiene presencia un ejercicio de análisis. En este episodio el estudiante descompone el problema en otros más pequeños, examina las relaciones entre los datos dados, las condiciones y el objetivo del problema, seleccionando posibles perspectivas de solución. Esto lleva a que el problema sea reformulado o simplificado.
Exploración	En este episodio se realiza un recorrido por el espacio del problema, buscando y descubriendo información relevante que pueda ser incorporada en episodios de análisis, planeación o implementación. En este episodio tienen presencia distintas heurísticas, la examinación de problemas relacionados, el uso de analogías, etc. Una exploración inadecuada puede llevar a estados desafortunados y un distanciamiento de alternativas prometedoras. Una distinción entre la exploración y el análisis puede ser realizada con base en su estructura y contenido. Mientras el análisis se caracteriza por ser bien estructurado, ciñéndose a las condiciones o logros del problema, la exploración es menos estructurada, de estructura amorfa y adicionalmente desligada del problema original.
Planeación	En este episodio tienen lugar un cuestionamiento del sujeto sobre cómo proceder para resolver el

	problema. Algunas rutas tentativas pueden ser trazadas y consideraciones o anticipaciones sobre estas rutas se pueden vislumbrar, lo que puede llevar o no a su implementación.
Implementación	En este episodio se ejecutan acciones cuyo objetivo central es operar sobre la información de la que se dispone. Estas acciones pueden estar apoyadas en los planes que en el episodio de planeación se han gestionado. Sin embargo, es posible que se realice la implementación de alguna estrategia sin que previamente esta se planificara, considere por ejemplo actuar de forma automática a un estímulo sin reflexionar sobre este. No todo ejercicio de planeación implica una implementación del mismo. Es posible que aun cuando se haya planificado una ruta de trabajo para resolver un problema, esta no se ejecute porque al considerar su efectividad no se vea mayor avance, o porque factores externos al sujeto impidan su ejecución.
Verificación	Este episodio tiene una naturaleza evidente por sí misma. En este episodio se llevan a cabo acciones de revisión sobre los resultados obtenidos y su correspondencia con lo solicitado en el enunciado del problema. Este episodio no es punto final del proceso de resolución. Por el contrario, puede desencadenar que el sujeto se sitúe en el punto de partida nuevamente si el resultado obtenido no es adecuado o consecuente con lo solicitado.
Transición	Entre los episodios mencionados tiene lugar una transición, vista como una coyuntura en la que se evalúa un estado del problema, su alcance o resultados y se toman decisiones que llevan a seleccionar una nueva dirección, lo que se traduce posiblemente en un nuevo episodio.

Tabla 2. Descripción episodios resolución de problemas

La investigación llevada a cabo por Artzt y Armour-Thomas (1992, p. 142) los llevó a distinguir estos episodios de acuerdo a la naturaleza de las acciones que predominaban, clasificándolos de esta forma en cognitivos o metacognitivos. Esto significa, por ejemplo, que un episodio podría caracterizarse como cognitivo si en este tenían presencia principalmente acciones cuya naturaleza atendía a procesos cognitivos. Kuzle (2013), en el marco de su estudio reconoció que en todos los episodios del modelo podían darse comportamientos tanto cognitivos como metacognitivos. Bajo este panorama, presentamos algunos ejemplos de comportamientos metacognitivos en la Tabla 3, reportados por esta autora, que pueden tener presencia en los distintos episodios del modelo presentado.

Ep.	Posibles comportamientos metacognitivos

Lectura	• Leer el enunciado del problema en voz alta para no perder detalles o información. • Hacer una lectura panorámica del problema y luego centrar la atención en los cuestionamientos. • Resaltar palabras clave del problema o expresiones consideradas relevantes. • Leer las partes principales del problema cuando este tiene múltiples objetivos. • Releer el problema para reconocer sus condiciones o partes importantes que se pudieran omitir.
Comprensión	• Reconocer las condiciones del problema, los objetivos del mismo o sus partes clave. • Considerar el conocimiento específico involucrado y estrategias relevantes. • Observar la información dada y lo que se solicita en el problema. • Cuestionarse por claridad de las partes del problema o su significado. • Dar sentido o significado a la información proporcionada en el problema. • Extraer y representar los objetivos y la información suministrada en el problema. • Representar gráficamente o simbólicamente el problema. • Recordar los requerimientos o condicionantes del problema. • Reorientar el esfuerzo realizado y valorar la productividad del pensamiento.
Análisis	• Divisar distintas perspectivas o mecanismos para abordar el problema. • Considerar e involucrar varios conceptos matemáticos, hechos o estrategias de utilidad. • Reformular o replantear el problema en palabras propias. • Identificar sub problemas o momentos del problema que deban ser atendidos.
Exploración	• Generar, justificar y refinar posibles caminos de solución. • Involucrar distintos recursos o representaciones. • Evocar situaciones sobre las que se tenga algún conocimiento. • Reflexionar sobre la viabilidad del proceso de pensamiento. • Seleccionar una estrategia teniendo seguridad sobre su utilidad.
Planeación	• Evaluar la funcionalidad de un plan imaginando sus resultados, posibles conjeturas y pruebas. • Monitorear, refinar, revisar o abandonar un plan de acuerdo a los objetivos del problema. • Examinar estrategias, verificar pasos y detalles del plan. • Cuestionarse por la posibilidad de utilizar alguna estrategia.
Implementación	• Considerar, acceder y organizar el conocimiento matemático relevante cuando se construyen declaraciones o procesa la información. • Evaluar la efectividad, conveniencia y eficiencia de las acciones. • Realizar acciones en consonancia con algún plan trazado. • Monitorear las acciones y dirigir el pensamiento y las acciones hacia una solución.
Verificación	• Revisar el trabajo para tener seguridad de no olvidar algún aspecto o cometer algún error. • Releer el problema para tener seguridad de que la solución obtenida refleja las condiciones del problema y responde a este. • Verificar los resultados para evaluar la razonabilidad de la solución del problema.

Tr.	• Reflexionar en el estado actual de la resolución del problema. • Reevaluar o recordar lo que se ha hecho hasta un determinado momento.

Tabla 3. Ejemplos de comportamientos metacognitivos por episodio

METACOGNICIÓN

La metacognición como objeto de estudio tiene sus orígenes en la década de los 70 y John Flavell es considerado como el padre de esta línea de investigación (Flavell, 1979; Kramarski, Mevarech, & Arami, 2002; Schneider, 2010; Schneider & Artelt, 2010). Desde la década de los 80 la investigación en educación matemática puso atención a este asunto e inició a incorporarlo en sus desarrollos teóricos, dada la posibilidad de analizar el desempeño en tareas matemáticas (Stillman & Mevarech, 2010). Particularmente, la investigación realizada respecto a la resolución de problemas encontró en este constructo una herramienta adecuada para comprender las actuaciones de los individuos que se comprometen en este tipo de tareas y las dificultades exhibidas por ellos, aspectos que la literatura reportaba ya con gran preocupación. La investigación realizada sobre la resolución de problemas y la metacognición mostraba ya que el éxito de una persona al resolver problemas estaba altamente relacionado a la existencia de habilidades o comportamientos metacognitivos en este sujeto, dado que estos elementos que le permitirían regular y monitorear sus acciones en el marco del proceso de resolución con miras a alcanzar una solución adecuada (Cox, 2005; Kuzle, 2013a).

Aun cuando sobre la metacognición se han elaborado definiciones alternativas y algunos desarrollos posteriores, entre los que se encuentra la expansión del termino mismo, la literatura reconoce la alta presencia, en las investigaciones realizadas, de la definición de metacognición propuesta por Flavell (1976, p. 232; citado en Garofalo y Lester, 1985) y en esta la presencia de dos aspectos generales: un dominio cognitivo y una función de monitoreo (Karsli, 2015, p. 36). Para Flavell la metacognición se concibe como:

(iii) El conocimiento personal sobre los procesos cognitivos propios y los productos, o cualquier otro aspecto, relacionado a estos; así como

(iv) El monitoreo activo y la regulación y orquestación consecuente de esos procesos en relación a los objetos cognitivos en los cuales ellos yacen, por lo general en función de un logro u objetivo concreto.

Esta definición hace mención al conocimiento de los procesos de pensamiento personales -literal i- y la habilidad de controlar, monitorear y auto-regular los comportamientos de aprendizaje personales bajo la intención de alcanzar una comprensión profunda y una resolución de problemas efectiva -literal ii- (Lin & Sullivan, 2008). Callahan y Garofalo definen estos dos aspectos contemplados en la definición de Flavell como sigue:

Aspecto	Interpretación
Conocimiento	El *conocimiento* de uno mismo como un realizador matemático involucra reconocer fortalezas y debilidades, así como comportamientos típicos y esperados, sumado a la seguridad y confianza sobre estrategias y procedimientos que pueden favorecer el desempeño. Las creencias o conocimiento sobre las matemáticas se incluyen acá, en cuanto este puede afectar el desempeño.
Regulación	La *regulación* de la metacognición corresponde a las decisiones que se toman respecto a cómo, cuándo, dónde, entre otras, llevar a cabo alguna acción que permitan explorar un problema, planear formas de abordarlo, actuar en conformidad a estas y revisar el proceso y resultados obtenidos. Esta auto-regulación está influenciada por el conocimiento metacognitivo.

La metacognición guarda relación con estrategias como la planeación, monitoreo, evaluación y reparación del desempeño (modificar intenciones, acciones y procesos). Estas estrategias metacognitivas orientan a los estudiantes a pensar antes, durante y después de la solución de un problema (Psycharis et al., 2014), verificando su progreso de aprendizaje, planeando y ejecutando cambios en las actividades cognitivas en curso, dados los resultados que se obtengan, y monitoreando y comparando resultados cognitivos con criterios externos e internos (Karsli, 2015).

La investigación realizada alrededor de las estrategias de instrucción sugiere que el aprendizaje en una disciplina se mejora por guiar a los estudiantes a través del desarrollo de estrategias metacognitivas relevantes (Wosnitza & Volet, 2009; citado en Psycharis et al., 2014). A su vez, la investigación en educación ha validado teorías que afirman la interacción que tiene lugar entre componentes afectivos, cognitivos y metacognitivos en el aprendizaje. Dado esto, aquellos enfoques instruccionales donde se da un papel protagónico al contenido ignoran componentes relevantes, reconocidos como valiosos para un aprendizaje profundo, que conlleven a que el estudiante pueda transferir conocimientos (Gourgey, 1998, 2001). La instrucción matemática, por tradición, se ha enfocado en incrementar el conocimiento matemático de los estudiantes (conceptos y procedimientos), sin dar el mismo énfasis y tratamiento al comportamiento matemático, esto es, el conocimiento metacognitivo (Callahan & Garofalo, 1987).

Para Schraw y Moshman (1995) la instrucción tradicional favorece un aprendizaje pasivo por lo general, lo que genera un aprendizaje inerte de conocimiento. Esto último sugiere la necesidad de prestar mayor atención al desarrollo de la metacognición en la instrucción. Sobre este último asunto, Lin y Sullivan (2008) hacen mención a los resultados de la investigación llevada a cabo por Brown (1983, citado por Lin y Sullivan, 2008) donde se precisa que la aplicabilidad de los conocimientos en nuevas situaciones, particularmente en el aprendizaje de contenidos y resolución de problemas, se da de buena forma si los sujetos se han involucrado en instrucciones intencionales donde se favorece la comprensión sobre el cómo, cuándo, por qué y dónde es utilizable la información y estrategias conocidas (p. 281).

Kuzle (2015a) considera, apoyada en Flavell, que el procesamiento cognitivo involucra aspectos cognitivos y metacognitivos. Haciendo eco a las ideas de Flavell, un sujeto desarrolla acciones o estrategias cognitivas para realizar un progreso cognitivo, al mismo tiempo este sujeto desarrolla acciones o estrategias cognitivas para monitorear el progreso cognitivo; a estas estrategias/acciones se les denomina respectivamente estrategias cognitivas y metacognitivas (Flavell, 1981; citado en Kuzle, 2015a). Ana Kuzle señala que los procesos cognitivos hacen referencia al procesamiento y almacenamiento de la información (Kuzle, 2015a), ejemplo de estos procesos son:

- La práctica: subrayar ideas, textos, resaltar información y copiar.
- La elaboración: resumir información, parafrasear ideas.
- La organización: elaborar un guion.
- La ejecución: realizar cálculos, trazar un diagrama.

Por su parte, los procesos metacognitivos tienen un rol de manejo y regulación sobre los procesos cognitivos, permiten manejar el pensamiento propio y tienen presencia como estrategias involucradas por un sujeto para planear su aprendizaje, monitorear y controlar su pensamiento (Flavell, 1976; citado en Kuzle, 2015a). La metacognición, dada su naturaleza, está en un nivel superior al permitir coordinar y manejar el sistema cognitivo, aunque también hace parte de este (Kuzle, 2015a, p. 629). De acuerdo a estas caracterizaciones la cognición está presente en la metacognición, dada su concepción, pero la contenencia recíproca podría o no darse en un acto cognitivo o al menos podría o no ser observable.

Metacognición en el nivel social y Co-regulación

La investigación sobre la metacognición ha permitido reconocer algunas relaciones entre este constructo y las interacciones sociales (Lin & Sullivan, 2008), llevándolo así más allá de la mirada individual dada desde sus orígenes investigativos. Este resultado tiene lugar a partir de la influencia de las relaciones sociales en el aprendizaje, aspecto dado por la posibilidad de reconocer mecanismos o rutas de acción formulados en el marco de un trabajo colaborativo que en un nivel individual posiblemente no tendrían lugar al momento de abordar una tarea. De acuerdo a esto, la metacognición puede verse desde una perspectiva social que involucra el monitoreo y control del conocimiento y emociones de uno mismo, así como de otros sujetos (Chiu et al., 2013). En adición al control metacognitivo individual, en esta nueva dimensión se reconocen también efectos dados por el trabajo colaborativo y la influencia social, escenarios donde la resolución de problemas promueve que el monitoreo y control de un sujeto sobre comportamiento de sus compañeros apoye una resolución exitosa, asunto que no es visible en el trabajo individual (Chiu et al., 2013). En el segundo capítulo de este documento se exponen algunas bondades de la metacognición en el nivel social, así como algunas desventajas.

La literatura reporta que adoptar una perspectiva de la regulación metacognitiva como socialmente compartida, conlleva a un mejor desempeño al interior de los grupos. Sin embargo, la investigación en esta línea se mantiene en un nivel primario aun (Raes, Schellens, Wever, & Benoit, 2016). Particularmente, Azevedo (2014; citado en Raes et al., 2016), como parte de su investigación, menciona con preocupación que hay poca investigación sobre cómo los grupos y sus miembros se comprometen, apoyan entre sí y regulan productivamente procesos metacognitivos colaborativos.

Ahora bien, se puede reconocer un gran interés por parte de los psicólogos en educación en el potencial de las actividades de aprendizaje colaborativo para producir altos niveles de aprendizaje (Volet, Summers, & Thurman, 2009). Cuando los individuos trabajan colaborativamente tres tipos de aprendizaje regulado tienen lugar: aprendizaje auto-regulado, donde cada miembro del grupo toma responsabilidad de regular su aprendizaje; aprendizaje co-regulado, donde cada miembro apoya a los miembros del grupo para regular su aprendizaje; finalmente, regulación compartida, donde el grupo, como un todo, regula los procesos de aprendizaje y su actividad colaborativa de manera sincronizada y productiva para la obtención de un resultado compartido (Raes et al., 2016). A continuación se presenta una idea más amplia de los dos primeros asuntos.

La auto-regulación del aprendizaje, según Räisänen, Postareff, y Lindblom-ylänne (2016), quienes retoman ideas de otros autores, se refiere a las acciones proactivas e intencionadas de los estudiantes con las que ellos regulan su cognición, comportamientos, motivación y emociones con el fin de mejorar sus procesos de aprendizaje. De acuerdo a Zimmerman (Räisänen et al., 2016) el aprendizaje auto-regulado incluye tres diferentes fases: i) configurar logros y planear antes de estudiar, ii) usar diferentes estrategias y monitorear y controlar el aprendizaje y iii) reflexionar en el aprendizaje después de estudiar. Este proceso es cíclico en naturaleza dado que la retroalimentación de un desempeño previo es usada para ajustar un desempeño posterior.

Por su parte, la co-regulación del aprendizaje se refiere a la regulación social del aprendizaje en la cual los aprendices temporalmente regulan su cognición, comportamientos, motivación y emociones en conjunto con otros estudiantes o un profesor (Räisänen et al., 2016). En la co-regulación, la regulación del aprendizaje es compartida entre uno mismo y otros y su objetivo es una transición hacia la auto-regulación. Las perspectivas socio culturales han usado el termino *co-regulación* para referirse al proceso por el cual los ambientes sociales apoyan o sirven como andamiaje en la participación y aprendizaje individual (Volet et al., 2009). La co-regulación puede darse en un bajo o en un alto nivel. En el primer caso solamente se da un intercambio simple de hechos o información o se da un episodio de andamiaje donde una persona apoya a otra en el desarrollo de habilidades de auto-regulación. En el segundo caso, la co-regulación se refiere a usar una regulación compartida en la que los estudiantes colectivamente comparten procesos de regulación que les permita alcanzar una meta compartida.

La co-regulación está construida sobre la perspectiva de Vigotsky de que los procesos psicológicos superiores de los individuos se originan en la interacción social (Zheng & Huang, 2016). Desde una perspectiva sociocultural la co-regulación es definida como el total de los procesos dinámicos reguladores a través de los cuales los individuos internalizan influencias sociales y culturales de su ambiente. La co-regulación, como concepto fundamental para comprender las interacciones sociales, enfatiza en mutualidad y representación compartida dentro de un contexto de aprendizaje colaborativo. Este concepto se puede caracterizar como un proceso regulatorio externamente iniciado que promueve características de auto-regulación en individuos y características de cognición compartida y distribuida en grupos (Zheng et al., 2014; citado en Zheng & Yu, 2016).

La co-regulación consiste en interacciones emergentes mediadas por configurar, planear, monitorear y evaluar un logro. El aprendizaje co-regulado puede ser promovido vía interacciones entre diferentes estudiantes o grupos de estudiantes. Una co-regulación exitosa es esperada por consistir de un logro dirigido y conocimiento co-construido por los miembros del grupo. La literatura reporta que una efectiva estrategia de co-regulación podría resultar en la construcción de conocimiento productivo y significativo por parte de los estudiantes (Zheng & Huang, 2016).

Ya se han evidenciado los beneficios del aprendizaje autorregulado en el aprendizaje individual (Zimmerman, 2000; citado en Isohätälä, Järvenoja, & Järvelä, 2017), pero dado que el aprendizaje toma lugar en configuraciones interactivas, es necesario explorar los procesos de regulación más allá del individual. La regulación metacognitiva de los estudiantes puede favorecerse a través de la resolución de problemas colaborativos. En este trabajo colaborativo tiene lugar la construcción compartida de conocimiento y la necesidad de que los estudiantes discutan y regulen sus actividades cognitivas, así como la de sus compañeros, ambiente que provee una oportunidad para practicar y refinar su metacognición (Raes et al., 2016).

La investigación reciente reporta que el aprendizaje colaborativo exitoso es facilitado por el compromiso en la coordinación y co-regulación de los grupos en el espacio compartido del problema (Roschelle & Teasley, 1995; citado en Volet et al., 2009). La regulación social tiene el potencial para explicar las dinámicas y la naturaleza relacional de la participación en actividades de aprendizaje (Volet et al., 2009). Aunque la interacción social en el aprendizaje colaborativo invita a los individuos a elaborar perspectivas divergentes y extender su pensamiento más allá de las capacidades individuales, tal interacción no emergerá sin las habilidades y voluntad de los miembros del grupo como un colectivo (Isohätälä et al., 2017). De acuerdo a Räisänen et al (2016) la literatura reporta un creciente interés en la co-regulación (regulación social) del aprendizaje, aunque poco es conocido al respecto en el nivel universitario, de ahí que el trabajo desarrollado en esa investigación brinda evidencia empírica al respecto y permitirá, en consecuencia, trazar nuevos horizontes de investigación.

Metacognición en el nivel ambiental

Considerando la metacognición como relevante para el aprendizaje y que esta permite a los estudiantes desarrollar su conocimiento para enseñarse a sí mismos y promover la transferencia de conocimiento a nuevas configuraciones y situaciones, diversas investigaciones se han realizado con el ánimo de mostrar la necesidad de desarrollar enfoques instruccionales que promuevan habilidades correspondientes a este constructo (Kim et al., 2013). Aun cuando la metacognición ha sido definida en el nivel individual, algunos investigadores han extrapolado este constructo a otros niveles como lo son el social, descrito en el anterior apartado, y el ambiental. Esta tipificación de niveles metacognitivos emerge por la consideración de que en el nivel individual el estudiante se puede ver limitado por los recursos con los que cuenta, por el reconocimiento de factores sociales en el aprendizaje, los cuales toman lugar en el seno de la interacción con otros y por el uso de recursos mediacionales en la ejecución de alguna tarea. Bajo esta consideración, Kim et al. (2013) proponen que adicional a los recursos individuales, los sujetos cuentan con la posibilidad de acceder a recursos externos que apoyen el pensamiento metacognitivo.

Estos recursos externos pueden verse en otros dos niveles: uno asociado a los recursos provistos por otros sujetos y otro nivel asociado a los recursos provistos por el ambiente en el cual el sujeto está inmerso. Estos tres niveles, aseguran los autores, pueden tener presencia durante el trabajo colaborativo que se da al resolver problemas y afectan la cognición y metacognición del individuo. La metacognición en el nivel ambiental, en particular, parte del supuesto de que las fuentes externas metacognitivas no se restringen a la interacción entre participantes en el marco de actividades colaborativas, sino que también el ambiente donde esta interacción toma lugar promueve metacognición. Esta metacognición promovida por el ambiente de interacción apoya tanto la metacognición individual, como la de tipo social. Esto es, retroalimentar y modificar las concepciones de un sujeto o de un grupo, como también servir bajo la figura de referente o recurso de validación de las ideas formuladas por el colectivo.

PROGRAMAS DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Una aproximación a la Geometría Dinámica

Los programas de geometría dinámica (en adelante GD) han revivido las construcciones geométricas (De Villiers, 2010; Mariotti, 2000, 2010). Estos ambientes corporeizan la geometría euclidiana, particularmente las construcciones con regla y compás (Hoyles & Jones, 1998; Mariotti, 2000). La posibilidad de construir objetos geométricos a partir de elementos primitivos como rectas, puntos y circunferencias (Hoyles & Jones, 1998; Vincent, 2002), en conjunto con la posibilidad de manipularlos sin que las propiedades con las que fueron construidos se alteren (Abdelfatah, 2011; Özen & Köse, 2013), han hecho que estos recursos estén fuertemente vinculados con la educación matemática, particularmente el campo de la geometría dado su potencial en el aprendizaje (Guven et al., 2012; Pitta-Pantazi & Christou, 2009). Hanna (2001, p. 12) asegura que la disponibilidad de programas de GD en la clase de matemáticas ha dado un nuevo ímpetus a la exploración matemática y ha traído consigo nuevos intereses en la enseñanza de la geometría.

Pitta-Pantanzi y Christou (2009) afirman que estos ambientes proveen la oportunidad de explorar y descubrir conceptos matemáticos, dado que la conservación de las propiedades de los objetos construidos tienen lugar en el marco de una jerarquía de propiedades que atiende a una lógica condicional (Mariotti, 2000, 2010). Se puede considerar que los programas de GD contribuyen en dos vertientes:

- En primer lugar, ofrecen un ambiente de experimentación libre a los estudiantes donde se pueden testar conjeturas, poner a prueba intuiciones, avanzando de casos particulares a patrones o propiedades generales y así inferir propiedades, generalidades o teoremas (Christou et al., 2004; Hanna, 2001; Marrades & Gutiérrez, 2001).
- En segundo lugar, se brinda un ambiente no convencional donde los estudiantes aprenden y comprenden conceptos matemáticos, lo cual sitúa un asunto de interés en el campo investigativo, asociado al estudio de estas nuevas formas de aprendizaje (Marrades & Gutiérrez, 2001).

Palais (1999; citado en Hanna, 2001) sostiene que la visualización a través de los gráficos generados por el computador hace posible no solamente la transformación de los datos, alterar imágenes o manipular objetos, sino que también permite examinar características de estos, aspecto que sin la ayuda del computador sería inaccesible. En Gawlick (2002) se señala que aunque son amplias y aceptadas las capacidades sobre la GD en función del apoyo en la comprensión y desarrollo de heurísticas, los estudios cualitativos realizados en torno al proceso de aprendizaje con este recurso muestran un carácter dual; por un lado se reconoce una extensión atractiva del alcance matemático junto a su potencial visual y heurístico; por otro lado, la GD conlleva a nuevos dominios subjetivos de experiencias en el campo de la geometría distintos a los elaborados en ambientes de lápiz y papel.

Bondades de la Geometría Dinámica

La naturaleza de los objetos construidos en pantalla y la posibilidad de manipularlos ofrece, según Goldenberg (1995; citado en Leung & Lopez-Real, 2002), el desarrollo de nuevos estilos de razonamiento no presentes en la geometría sintética euclidiana, aspectos de orden didáctico, más que axiomático (Hölzl, 1996; citado en Leung & Lopez-Real, 2002). La GD ayuda a los estudiantes a comprender las proposiciones geométricas (construir sobre condiciones particulares y observar resultados obtenidos como consecuencia de ello) dada la posibilidad de realizar construcciones con alta precisión (Hanna, 2001). También promueve el descubrimiento de relaciones o la verificación y aceptación o rechazo de otras. Esto favorece en los estudiantes adquirir un significado sobre la proposición que es objeto de estudio (reconocer relaciones de dependencia). Estas particularidades convierten a la GD en un ambiente de experimentación donde los sujetos que interactúan con esta pueden verificar conjeturas y patrones invariantes de figuras, un escenario en el que a través de la inducción, se puede avanzar desde casos particulares hasta casos generales (Guven et al., 2012). Para Mariotti (2000) y Smith, Hollebrands, Iwancio y Kogan (2007) esta relación permite que además tenga lugar una correspondencia entre las construcciones geométricas en este ambiente y algunos teoremas del mundo teórico de la geometría euclidiana.

La función de arrastre de la GD hace posible una variación continua de configuraciones geométricas y permite rápida y fácilmente determinar si una conjetura es verdadera o no (Christou et al., 2004). Una revisión literaria alrededor del rol de la GD llevó a Hòlzl (2001, citado en Gawlick, 2002) a afirmar que existe abundante desarrollo en relación al soporte de la GD en la fase heurística de la resolución de problemas, sin embargo se cuestiona si el software realmente se usa en una forma metodológica y activa de adquisición de conocimiento. Para este autor pareciera que la GD solo se involucra como herramienta de verificación empírica de conjeturas. Autores como Leung y López-Real (2002) afirman que en la GD estudiantes y profesores pueden experimentar, a través de distintos tipos de arrastre, sobre los objetos construidos y con ello inferir propiedades -generalidades, teoremas- (Özen & Köse, 2013). La variación de parámetros dentro del ambiente permite descubrir invariantes en algunas relaciones y la generalización de casos particulares, lo cual conlleva a generar evidencia empírica de algunos teoremas, aspecto difícil, incluso no muy probable, en ambientes estáticos de lápiz y papel (Hoyles & Jones, 1998).

Asuntos para atender

Lo anteriormente mencionado, respecto a las bondades de la GD, sumado a la facilidad de obtener medidas de ángulos, determinar distancias entre puntos y relaciones entre objetos (v.g. perpendicularidad, paralelismo) ha favorecido un enfoque empírico al momento de proveer una justificación, por encima de una necesidad de generar demostraciones, por parte de los estudiantes, lo cual se justifica por el poder de convencimiento que se da al verificar alguna propiedad a través del arrastre, el cual es mayor al generado por una demostración (Mariotti, 2000; Vincent, 2002). El éxito de la GD para explorar situaciones ha conllevado accidentalmente a que muchos educadores prefieran el enfoque experimental para la justificación matemática, por encima de la demostración deductiva (Hanna, 2001). La construcción realizada y el resultado generado a través de la manipulación de los objetos involucrados generan una fuerte evidencia de la veracidad de algún resultado geométrico estudiado y con ello una confianza confundida con la demostración del mismo. Dada la naturaleza inductiva de la GD, la brecha experimental-teórica que existe en la adquisición y justificación de conocimiento geométrico llega a ser una importante preocupación (Christou et al., 2004). Este panorama ha generado debate entre los profesionales de la educación dado que no promueve el aprendizaje y desarrollo de la demostración (Laborde, 2000).

Aunque autores como Hanna (2001) sitúan la GD como un recurso con el potencial para promover la exploración de situaciones y la formulación y demostración de conjeturas, para otros autores el uso de la GD para ayudar a los estudiantes en formas de justificar o demostrar es controversial (Marrades & Gutiérrez, 2001). Para Gawlick (2002) la disponibilidad de la GD en la clase de matemáticas tiene el potencial de enriquecer y ampliar los procesos de aprendizaje pero también incluye riesgos colaterales, algunos dados por la interactividad con el software. Aunque se reconoce su virtud como facilitador de aprendizaje y comprensión (De Villiers, 1998; citado en Marrades y Gutiérrez, 2001), se ha alarmado sobre el riesgo de que estos ambientes impidan avanzar hacia la demostración formal al no dejarlos salir del trabajo empírico, el cual podría sustituir la necesidad de proveer alguna justificación. Sin embargo, se reconoce que una gestión adecuada en la planeación con ayuda de este ambiente puede favorecer la producción de justificaciones deductivas (Camargo, Samper, & Perry, 2006), brindando así una explicación a los resultados evidenciados en la pantalla y por qué estos son verdaderos (Hoyles & Jones, 1998).

Consideraciones

Autores como Abdelfatah (2011) y Koyuncu, Akyuz y Cakiroglu (2015) mencionan resultados de investigaciones en los cuales se observa como la GD favorece la resolución de problemas, la comprensión de conceptos y teoremas geométricos, el descubrimiento y conjetura de relaciones de dependencia, un logro y actitud hacia las matemáticas, así como el desarrollo de habilidades de demostración reduciendo la brecha entre la construcción y deducción geométrica. Los programas de GD bien podría ayudar a los estudiantes a comprender la necesidad de la demostración, pero llegar a este momento requiere tiempo y no se da de forma espontánea. En consonancia con Holzl (1999, citado en Gawlick, 2002), Gawlick señala que el dinamismo del software no es una ventaja dinámica por sí misma, su uso debe darse a partir de una profunda consideración y no solo como un cambio de recursos en el aula, aspectos de orden curricular deben ser tenidos en cuenta en consecuencia. Para Hanna (2001), la exploración empírica es un asunto importante en las matemáticas, de gran relevancia en la época en que los computadores no existían y por lo tanto no debería ser dejada de lado por parte de la demostración, sino más bien, hacer uso adecuado de ambas; la exploración ayuda a descubrir, a la vez que la demostración ayuda a confirmar, asegura la autora. La GD abre un nuevo enfoque para la enseñanza de la demostración (Hanna, 2001). Estos sistemas han evolucionado a lo largo del tiempo desde amplificadores visuales a componentes fundamentales en la comprensión conceptual. La GD debe complementar los métodos tradicionales como el lápiz y papel, ya que ambos proveen elementos importantes en el desarrollo conceptual del estudiante. Esta última idea es soportada por Gomes & Vergnaud (2010; citado en Koyuncu et al., 2015), quienes aseguran que el conjunto de artefactos usados por los estudiantes permite emerger diferentes conceptos geométricos.

DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA EN PGD

La demostración en matemáticas, retomando palabras de Laborde (2000), es un tipo específico de discurso cuyo fin es validar la verdad de alguna afirmación, así como convencer a otros de la validez de dicha aserción. Para Hanna (2001) la demostración, desde su estructura formal de derivación (secuencia de sentencias), llega a ser convincente y legítima para un matemático siempre y cuando esta conduzca a una comprensión matemática real.

La demostración en la educación matemática

Cronológicamente se puede reconocer en la investigación en educación matemática un giro dado, en años recientes, desde enfoques donde se pretendía promover habilidades para la demostración en los estudiantes, hacia enfoques donde se estudia la evolución de la comprensión de los estudiantes respecto a la demostración y formas para apoyar esta comprensión (Marrades & Gutiérrez, 2001, p. 88). En la educación matemática se considera que uno de los campos de investigación más interesantes y desafiantes corresponde a cómo los estudiantes comprenden la demostración y promueven sus habilidades en dicha práctica; al respecto, distintos experimentos en la enseñanza han tenido lugar, obteniendo de forma reiterada resultados no afortunados (Marrades & Gutiérrez, 2001). Aprender a demostrar se consideraba como una de las tareas más complejas en el nivel escolar, aunque debería considerarse como un desafío intelectual del que se tiene gusto afrontar

(Silver, 1998) al igual que cualquier acertijo. La demostración yace en el corazón de las matemáticas aun cuando es un concepto elusivo para los estudiantes, según lo reporta la investigación en educación matemática (Hoyles & Jones, 1998).

De acuerdo a Hoyles y Jones (1998), la enseñanza de la demostración se ha enfocado en la presentación de argumentos estandarizados lineales por parte de los estudiantes, muchas veces no comprendidos por ellos así como tampoco su función; esta no se usa como parte de la resolución de problemas y se considera como algo irrelevante. Por lo cual no se aprecia su rol en la actividad matemática. Haciendo eco a otros autores, estos autores consideran que en tanto la demostración solo se presente como un medio para mostrar a los estudiantes porqué algo de lo que ellos están convencidos es verdadero, esta se mantendrá como una actividad irrelevante. Bajo este panorama es menester de los educadores matemáticos encontrar formas para dotar la demostración de otros significados y funciones. En décadas recientes, asegura Vincent (2002), se ha visto una declinación general en la geometría dentro del currículo escolar, reconociendo en esta únicamente un carácter empírico y dotando a los estudiantes con un significado pobre de la demostración. Algunos educadores en el contexto educativo han dado prioridad a heurísticas, por encima de la demostración, argumentando que su elección atiende a la utilización y optimización de tiempos, así como el hecho de que la demostración puede convertirse en un impedimento para la comprensión, más que una ruta para llegar a esta (Hanna, 2001).

Para Hoyles y Jones (1998) y Camargo et al. (2006) la demostración debería tener un rol central en el currículo, lo que lleva a la necesidad de diseñar y evaluar innovaciones en el aula que apoyen el establecimiento de un vínculo entre el razonamiento empírico y deductivo a través de la actividad matemática; esto a su vez demanda involucrar contextos que permitan tal conexión. Esta idea es compartida por Hanna (2001), quien señala el crecimiento en la literatura en la década de los noventa en relación a la enseñanza y aprendizaje de la demostración, asunto que la lleva a considerar la relevancia que sobre este tema se ha dado. Esta autora reconoce que debe comprenderse el rol de la demostración en la enseñanza para así poder promoverla al interior de la clase y que esta permita una mayor comprensión matemática. Como recurso para la atención de este desafío, Hanna considera que la GD es un camino apropiado y efectivo con el que se abren nuevas perspectivas para la enseñanza de la demostración.

La demostración y geometría dinámica

A partir del panorama presentado anteriormente, los computadores (programas de GD en nuestro caso) parecen convertirse en un contexto adecuado, siendo cauteloso en las declaraciones que sobre su uso e impacto se realicen, ya que no se cuenta con seguridad completa de un impacto positivo dada su inclusión. Ya es grande el número de años en que se ha investigado la influencia de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de la demostración en matemáticas y en este campo se encuentra el estudio realizado alrededor de la GD (Sánchez et al., 2004). Por su parte, otros autores, como Hoyles y Jones (1998,) se cuestionan por la posibilidad de innovar en los enfoques de enseñanza con la asistencia de computadores, promoviendo la demostración como medio para desarrollar ideas geométricas o que estos sean vistos como un remplazo de la demostración.

Los sistemas de GD han estimulado la investigación sobre las concepciones de los estudiantes acerca de la demostración y han abierto nuevas líneas de trabajo en este tema (Marrades & Gutiérrez, 2001). En términos de Vigotsky (Laborde, 2000), los programas de GD ofrecen la posibilidad de acceder a justificaciones teóricas a través de la mediación semiótica organizada por el profesor alrededor de las herramientas de construcción de estos ambientes. La GD tiene el potencial de promover tanto la exploración como la demostración al facilitar el planteamiento y comprobación de conjeturas (Hanna, 2001, p. 13).

Aunque muchos documentos han reportado la pertinencia de la GD en tareas de demostración, como lo señala Laborde (2000), este recurso per se no promueve la necesidad de demostrar sin un adecuado “ambiente” (*milieu*, en términos de Brosseau, 1997, citado por Laborde 2000), esto es, la organización y gestión de un escenario donde las tareas propuestas y el uso dado a la GD favorezcan la resolución de un problema y la elaboración de una demostración. Autores como Christou et al. (2004) reconocen que la GD provee un adecuado contexto donde el significado de la demostración no puede ser voluntariamente reconocido, pero que para atender este asunto es necesario el desarrollo de tareas adecuadas, aquellas donde la demostración pueda ser vista como un medio para establecer la verdad de algún resultado. En este caso se reconocen los problemas abiertos como adecuados ya que no proveen algún método de solución ni tampoco establecen aquel enunciado a demostrar (Jones, 2000; citado en Christou et al., 2004); en este tipo de problemas los estudiantes se comprometen en un proceso en el que exploran una situación, elaboran conjeturas, las validan y posteriormente demuestran. Healy and Holyes (2001) han considerado que promover en los estudiantes explicaciones como base para elaborar deducciones lógicas puede ser alcanzado a través de situaciones cuidadosamente diseñadas donde se proponga a los estudiantes problemas de construcción donde se deban reconocer propiedades dadas de aquellas que se pueden obtener, sumado a la posibilidad de arrastrar los objetos geométricos con el fin de verificar la validez de propiedades aparentemente verdaderas.

La exploración de un problema es por naturaleza empírica y en una primera mirada pareciera que no se ajusta en una estructura deductiva de la demostración geométrica (Christou et al., 2004). Retomando las palabras de Mariotti (2000; citado en Christou et al., 2004), el problema de combinar la exploración inductiva con estructura deductiva de las demostraciones geométricas ha sido el objeto de estudio de numerosas investigaciones. Aun así, Healy y Hoyles (2001) señalan que en el trabajo realizado por algunos estudiantes en el computador muchas veces la mayoría de ellos proveen justificaciones de manera espontánea a sus acciones, justificando la validez de las mismas. Igualmente se ha observado que en algunos casos cuando los resultados son sorpresivos para los sujetos, ellos intentar proveer una justificación a estos.

Algunas investigaciones han mostrado que el tránsito de una geometría exploratoria a una deductiva no es simple ni espontáneo (Christou et al., 2004), así mismo, que la GD ayuda a los estudiantes a reconocer propiedades y relaciones de dependencia, pero que cuando tiene lugar un trabajo alrededor de la demostración, las construcciones realizadas en este ambiente computacional son abandonadas (Hoyles & Hanna, 1999; citado en Christou et al., 2004). Esto último sugiere, de acuerdo a Christou y colaboradores, que la GD ayuda a comprender problemas en geometría, pero no contribuye al desarrollo de sus habilidades en la demostración, lo que refuerza la idea de la brecha existente entre la GD y la demostración.

Los programas de GD pueden proveer una oportunidad para considerar el por qué a una determinada situación, el qué tal si y el qué tal si no; asuntos que requieren de tareas cuidadosamente diseñadas (Hoyles & Jones, 1998) donde se brinde a los estudiantes una experiencia donde exploren y reconozcan hechos de la geometría que son verdaderos y que estas experiencias les permitan a los estudiantes explicar los motivos por los cuales pueden llegar a ser verdaderos. Sin embargo, Laborde (2000) señala que la oportunidad que estos programas brindan para reconocer propiedades podrían fácilmente reducir o incluso eliminar cualquier necesidad por demostrar alguna declaración. La convicción que en los estudiantes puede generar la representación gráfica, ofrecida por los programas de GD, que conlleva a que ellos consideren innecesaria la demostración se da en tanto los profesores hacen un énfasis en la demostración como fuente de validación y no en aquella que promueve la comprensión (Camargo et al., 2006).

Argumentación y justificación

Retomamos las ideas del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Perry et al., 2013), perteneciente a la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), acerca de la argumentación, con el fin de adoptar una postura al respecto. La argumentación es asumida por este grupo a partir del modelo propuesto por Toulmin, en esta propuesta se reconoce el argumento como un enunciado oral o escrito cuya estructura es ternaria, a través del cual se relacionan proposiciones: datos y aserciones y una garantía. La forma en que estas proposiciones se relacionan define un tipo particular de argumento: inductivo, abductivo o deductivo (una descripción de estos tipos de argumentos se presenta en Perry et al., 2013, p. 19). Bajo esta idea se asume la argumentación como "la formulación de argumentos para apoyar una idea" (Perry et al., 2013, p. 22) y contra argumentación como argumentos con los que se pretende rechazar esta.

La argumentación es un fenómeno social (Krummheuer, 1995) en el que los miembros de un grupo discuten sobre la solución a un problema, explican su razonamiento y negocian operaciones y soluciones obtenidas. Krummheuer señala que la argumentación se puede entender como un producto que no se desarrolla únicamente por un sujeto, sino que esta es permeada y modificada por la interacción de este sujeto con otros. Este proceso comunicativo se enmarca en un conjunto de reglas y características aceptadas por los miembros de un colectivo (Perry et al., 2013). Ahora bien, respecto a la justificación matemática, Perry et al. caracterizan esta como una argumentación en la que se encadenan argumentos de forma tal que "una proposición concluida en un determinado argumento se usa como dato en otro" (2013, p. 22).

METODOLOGÍA

Presentamos en este capítulo las consideraciones metodológicas que orientaron el desarrollo del estudio presentado en este documento. En primer lugar, se indica la perspectiva investigativa adoptada y las motivaciones que subyacen a esta elección. En un segundo momento se hace un recuento de la búsqueda de información y fuentes documentales que permitieron cimentar los aspectos teóricos y metodológicos, así como los antecedentes investigativos del estudio, elementos que permitieron construir una mirada panorámica de los asuntos involucrados y la relación entre estos. En un tercer momento se describe la población involucrada, sus experiencias académicas y características. Seguido a esto se presentan los problemas propuestos y un análisis de cada uno, reconociendo la pertinencia de la GD en su resolución. Luego se hace mención a la metodología empleada para el acopio de la información y las consideraciones teóricas que se tuvieron en cuenta y en la parte final se presentan las herramientas teóricas incluidas, con las cuales se realizó un análisis de los datos recolectados, con miras a trazar resultados y conclusiones del estudio de acuerdo a los objetivos del mismo.

PERSPECTIVA INVESTIGATIVA

En este documento reportamos el trabajo realizado por dos parejas de estudiantes al resolver cuatro problemas de demostración con ayuda del programa de GD Geogebra. Considerando que las producciones y actuaciones de los dos grupos serán analizadas en paralelo, con miras a determinar y explicar tanto diferencias como similitudes entre ellos, el estudio llevado a cabo se sitúa dentro de la perspectiva de estudio comparativo (Artigue & Winslow, 2010; citado en Dindyal, 2014).

Ahora bien, dado que el estudio comparativo se apoya en el comportamiento de dos parejas de estudiantes y que se quiere explorar y comprender las dinámicas que tienen presencia en estas configuraciones dentro de un contexto particular, como lo es la resolución de problemas, proveyendo descripciones de las actuaciones de los individuos que pertenecen a estos grupos a la luz del marco teórico adoptado, consideramos que el estudio comparativo tiene presencia en el marco de los estudios de caso (Baxter & Jack, 2008; Eisenhardt, 1989) cuya unidad de análisis (caso) es el proceso de resolución de los problemas propuestos (Baxter & Jack, 2008). Bajo esta línea, considerando que se quieren establecer diferencias entre dos casos en particular, el tipo de estudio de caso que se involucrará corresponde al estudio de múltiples casos, enfoque que nos permitirá analizar al interior de una configuración (intra-grupo), así como analizar entre configuraciones distintas (inter-grupos), llevando así a comprender diferencias y similitudes entre los casos involucrados (Baxter & Jack, 2008).

Para el análisis de cada caso involucrado, dada su naturaleza, en la que tiene lugar un procesamiento de la información y una secuencia de pasos para transformar una situación de partida en una deseada o solicitada, se involucra la metodología de Análisis de Protocolos (Maldonado, 2001). En el sexto apartado se hace una descripción del proceso involucrado bajo esta metodología. En consecuencia, la perspectiva investigativa adoptada en este documento corresponde a un estudio comparativo de múltiples casos, apoyados en el análisis de protocolos.

REVISIÓN LITERARIA

El estudio reportado en ese documento requirió la fundamentación teórica de cinco asuntos principalmente: resolución de problemas, metacognición, geometría dinámica, demostración en geometría y análisis de protocolos. El engranaje y pertinencia de los cuatro primeros asuntos ya ha sido expuesto en el capítulo del estado del arte y su desarrollo conceptual se presentó en el marco teórico, el quinto asunto mencionado tiene pertinencia por el enfoque metodológico adoptado en este estudio. La conceptualización de estos elementos permitió formular el estado del arte y los antecedentes investigativos, el marco teórico que sustenta la investigación y aspectos metodológicos para la recolección y análisis de la información.

El acopio de la literatura involucró una revisión, profunda pero no exhaustiva, alrededor de aspectos teóricos relacionados con la resolución de problemas, la demostración en geometría, la geometría dinámica y la metacognición. En este punto se realizó una búsqueda en distintas bases de datos en internet de trayectoria conocida y con un alto número de publicaciones en distintas disciplinas científicas (v.g. Springer, JStor, Science Direct, Ebsco). En estas bases de datos se tuvieron en cuenta criterios como la fecha de publicación de los documentos y el filtro de información a partir del uso de palabras claves. Respecto a la fecha de publicación, se tuvieron en cuenta principalmente documentos que hubiesen sido publicados desde el año 2000 a la fecha, decisión que atendía a la necesidad de involucrar literatura y resultados de investigación recientes, que ofrecieran una mirada contemporánea de los asuntos abordados. En el caso de los filtros por palabras clave se involucraron aquellas estrechamente relacionadas con los asuntos de investigación (v.g. *metacognition, problem* *solving, dynamic geometry, proof, geometry*). Algunas revisiones documentales posteriores fueron realizadas cuando se quería ampliar alguna idea en particular. En estos casos se utilizaban palabras claves de acuerdo a la naturaleza del asunto del cual se quería mayor información.

Esta búsqueda permitió encontrar 97 documentos dentro de la ventana de observación contemplada, los cuales abarcaban dos o más de los asuntos teóricos involucrados, aspecto positivo al considerar que la literatura ya reportaba avances en la investigación a partir de estos aspectos y las combinaciones entre ellos. Sin embargo, debe señalarse que ninguno de los documentos encontrados involucraba los cuatro asuntos teóricos aquí mencionados, lo que permite asegurar que, bajo esta revisión realizada, no se encuentran evidencias de estudios que atiendan al objetivo formulado en este documento. En el mejor de los escenarios algunos documentos abordaban desarrollos teóricos de la resolución de problemas y su relación con la metacognición mediada por ambientes de geometría dinámica, dejando de lado el tratamiento de problemas de demostración (v.g. Ana Kuzle), mientras que en otros casos se hacía un tratamiento que dejaba de lado la metacognición (v.g. Hanna, Healy y Hoyles y Marrades y Gutiérrez) o la incorporación de geometría dinámica (v.g. Carlson y Bloom, Kim et al. y Furinghetti y Morselli). La distribución de la cantidad de fuentes documentales, una vez hecho su acopio y atendiendo a los asuntos teóricos involucrados, se presenta a continuación.

Diagrama 1. Distribución literatura revisada

Una clasificación un poco más minuciosa de estas fuentes documentales, obedeciendo a su fecha de publicación y asuntos de estudio, se presenta en el Diagrama 2. Debe mencionarse que en este diagrama se observan algunos documentos por debajo de la ventana de observación contemplada inicialmente. Si bien es cierto que en años anteriores ya se reportaba literatura en estas líneas de investigación, debe señalarse que el motivo de incluirla en este estudio se debe a las continuas referencias realizadas a estos documentos por parte de los autores de los documentos cuya fecha de publicación está dentro de la ventana de observación adoptada, lo cual llevó a revisar estos documentos más antiguos con el fin de cimentar los aspectos teóricos involucrados y reconocer, a partir de una mirada cronológica, la evolución de algunos asuntos de investigación a lo largo de los años. Esta revisión dio lugar a una presentación de la trayectoria de la metacognición y la resolución de problemas desde sus orígenes, la cual se presenta en el capítulo del estado del arte. Este diagrama también permite observar una acumulación en los documentos acopiados a partir del año 2000, lo cual es esperado de acuerdo a los criterios de búsqueda adoptados.

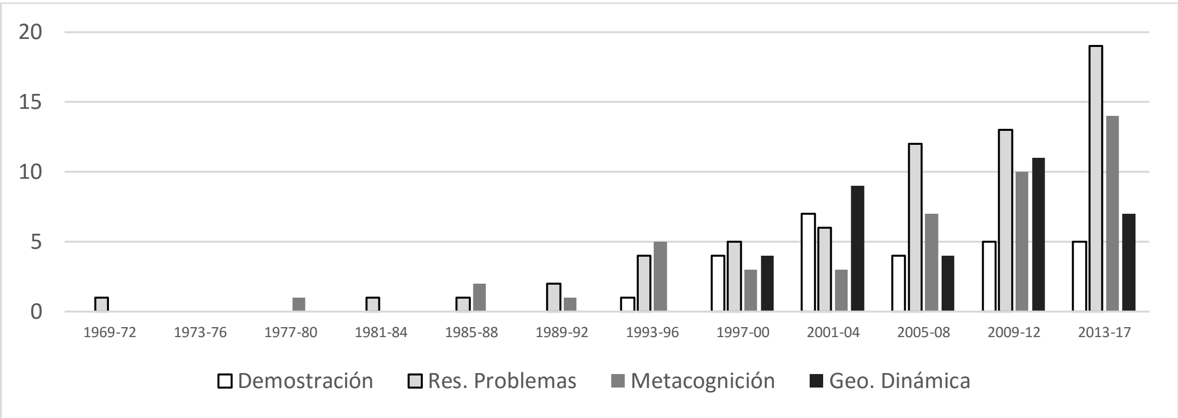


Diagrama 2. Distribución cronológica literaria

Respecto al análisis de protocolos, quinto asunto a considerar dentro del estudio presentado, debe señalarse que la revisión literaria realizada atendió principalmente a la necesidad de fundamentar la metodología misma y las estrategias de registro y codificación inmersas en esta, asuntos que apoyarían la recolección y tratamiento de la información acopiada, así como el análisis de la misma. A modo de cierre, la cantidad de documentos revisados permite tener un respaldo frente a la validez de la mirada panorámica de los asuntos involucrados que en el estado del arte se presenta, cimentando así la investigación en distintas fuentes teóricas y reconociendo distintos antecedentes investigativos, dentro de los cuales no se tiene registro de alguno idéntico al que en este documento se reporta y con los cuales pueden apoyarse o contrastarse los resultados de investigación que este estudio arroje.

CONTEXTO DEL ESTUDIO

Para llevar a cabo el estudio se involucraron cuatro estudiantes de primer y cuarto semestre[5] de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia). Dado

[5] Dos estudiantes de cada semestre.

que el objetivo de la investigación era identificar comportamientos metacognitivos en el marco de la resolución de problemas de demostración donde media la geometría dinámica, se eligieron estudiantes cuya formación era distinta, en términos de su trayectoria académica, con el fin de comparar los procesos metacognitivos exhibidos en cada grupo y contrastar esto con su nivel de formación a lo largo de la Licenciatura. Tomar esta muestra para el estudio permitiría estudiar el efecto que tiene la profundidad en la formación matemática en función de los procesos metacognitivos manifestados por cada pareja de estudiantes y el proceso de resolución exhibido por cada grupo al afrontar los problemas, aspecto que permitiría apoyar o contrastar, de acuerdo a estudios reportados en la literatura, si el grado de conocimientos disciplinares de un individuo no garantiza la resolución exitosa de un problema, sino que son factores de orden metacognitivo los que facilitan abordar un problema y dar una solución acertada al mismo.

Debe mencionarse que los estudiantes involucrados se destacaban por tener resultados altos en los espacios académicos de geometría que habían cursado. Sin embargo, sus experiencias eran distintas de acuerdo al número de espacios académicos que habían cursado. Los estudiantes de primer semestre apenas habían cursado y aprobado el espacio académico Elementos de Geometría mientras que los estudiantes de cuarto semestre habían cursado y aprobado todos cuatro espacios académicos de fundamentación de esta línea (ver Tabla 4). Una descripción de la naturaleza de estos espacios académicos se presenta en la Tabla 4. Esto permite apreciar el conjunto de conocimientos que diferenciaba a los grupos de estudiantes, así como una diferencia en la cantidad y tipo de experiencias en las que se habían involucrado programas de geometría dinámica para resolver problemas de construcción, reconocimiento de relaciones de dependencia o descubrimiento de lugares geométricos, otro aspecto que aventajaba a los estudiantes de cuarto semestre.

Aun cuando los estudiantes de cuarto semestre contaban con mayor cantidad de contenidos en su bagaje teórico, así como un conocimiento un poco más profundo sobre los programas de GD, debe señalarse que para ambos grupos era un común denominador la metodología de trabajo con la que los espacios académicos se gestionaban. Los tres primeros cursos de geometría cuentan con la particularidad de desarrollarse a partir de la propuesta metodológica formulada por el grupo de investigación AEG (Camargo et al., 2006; Perry et al., 2013), a través de la cual el conjunto de elementos teóricos estudiados en clase surge como resultado de un trabajo grupal en el que los estudiantes se involucran en la resolución de problemas en los que la geometría dinámica es protagonista, al permitir que procesos de conjetura y justificación tengan lugar.

Las producciones de los estudiantes se someten a la evaluación de sus compañeros, quienes apoyan o refutan sus propuestas y aquellos elementos que sean aceptados por el colectivo de estudiantes conforman un sistema teórico (definiciones, teoremas y postulados) en el marco de la geometría euclidiana (Perry et al., 2013). Los elementos del sistema teórico conformado al interior de la clase se convierten en único garante de los argumentos que los estudiantes utilizan para soportar o refutar sus ideas y las de sus compañeros. Bajo esta propuesta metodológica el profesor no es quien trasmite el conocimiento, más bien, este agente interviene en la interacción que tiene lugar entre los grupos, cuestionándolos sobre sus apreciaciones y motivándolos a proponer argumentos a las afirmaciones que postulen; en esencia, el profesor es el encargado de ofrecer oportunidades a los estudiantes para que a través de la resolución de problemas se involucren y descubran hechos de la geometría euclidiana a la vez que gestiona un ambiente de indagación en el que los estudiantes son protagonistas en la construcción de su conocimiento.

EA	Elementos de Geometría	Geometría Plana
Aprendizajes esperados: se espera del estudiante	• Uso con significado de los conceptos y propiedades de figuras planas y las relaciones geométricas congruencia, semejanza, paralelismo y perpendicularidad. • Manejo del lenguaje geométrico acordado, en forma oral y escrita, para comunicar ideas sobre los conceptos y relaciones geométricas referidas a figuras planas. • Justificación, ceñido a un microsistema local, de afirmaciones sobre la congruencia de triángulos y las relaciones entre puntos, rectas y planos. • Establecimiento de conjeturas respecto de propiedades o relaciones geométricas relativas a triángulos y a cuadriláteros. • Uso de representaciones gráficas como apoyo en el análisis de conceptos y de las relaciones de congruencia y semejanza. • Uso de la geometría dinámica para explorar y comprobar hechos geométricos.	• Usa los conceptos, propiedades y relaciones geométricas estudiadas para justificar hechos geométricos de la geometría euclidiana plana. • Utiliza el lenguaje geométrico acordado, en forma oral y escrita, para comunicar ideas sobre los conceptos y relaciones geométricas referidas a figuras planas. • Establece conjeturas respecto de propiedades o relaciones geométricas relativas a los objetos de estudio. • Valida proposiciones con argumentos formales que se ciñen al sistema axiomático de referencia. • Comunica correctamente, en el marco de una teoría específica, argumentos que refuten, apoyen o complementen ideas. • Usa representaciones gráficas como apoyo en la interpretación de conceptos y relaciones geométricas. • Usa adecuadamente un software de geometría dinámica con el objetivo de extraer elementos de una situación, resultado del dinamismo de las representaciones obtenidas en el software, como recurso en la elaboración de justificaciones.
EA	Geometría del Espacio	Geometría Analítica
Aprendizajes esperados. se espera que el estudiante	• Establezca conjeturas respecto de propiedades o relaciones de la geometría del espacio. • Use representaciones gráficas 3D como apoyo en la interpretación de conceptos y relaciones geométricas. • Valide proposiciones con argumentos formales que se ciñan al sistema axiomático de referencia. • Use con significado los conceptos, propiedades y relaciones geométricas, tanto de la geometría plana como la del espacio, para justificar hechos geométricos. • Comunique correctamente, en el marco de una teoría específica, argumentos que refuten, apoyen o complementen ideas. • Usa adecuadamente un software de geometría dinámica con el objetivo de extraer elementos de una situación, resultado del dinamismo de las representaciones obtenidas en el software, como recurso en la elaboración de justificaciones.	• Represente objetos geométricos en diferentes sistemas coordenados. • Represente los correspondientes conjuntos solución de ecuaciones algebraicas y paramétricas en diferentes sistemas coordenados. • Establezca las relaciones que pueden existir entre algunas ecuaciones algebraicas y paramétricas con objetos geométricos como rectas, planos, circunferencias y esferas. • Realice cambios de coordenadas de diferentes objetos geométricos. • Demuestre resultados de la geometría euclidiana mediante el uso de objetos algebraicos. • Modele objetos de la geometría analítica con diferentes programas de Cálculo simbólico y Geometría dinámica.

Tabla 4. Aprendizajes espacios académicos línea de geometría (Fuente: Programa espacios académicos Lic Matemáticas, DMA, UPN)

GEOGEBRA: SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

La investigación realizada no involucró el desarrollo de algún ambiente computacional. En su lugar, se involucró Geogebra[6], software de geometría dinámica de conocida trayectoria. Geogebra es una calculadora gráfica que aborda temas de la geometría, álgebra, cálculo y estadística. Su presencia puede darse en todos los niveles educativos y su aceptación ha sido tal, que en distintos países se reportan comunidades dedicadas a estudiar su impacto en el campo educativo y avanzar en el perfeccionamiento del programa mismo[7]. Igualmente, son ya varios los reconocimientos que este software ha recibido, esto debido a su completitud, facilidad de uso, alcance y beneficios educativos[8]

En el caso de la geometría, Geogebra permite realizar un trabajo con geometría plana y del espacio de manera simultánea, aspecto característico de este software, a través de un menú de comandos en el que se involucran distintas relaciones geométricas. Al igual que cualquier programa de geometría dinámica, las funciones de arrastre y traza están disponibles en Geogebra, las cuales, al ser vinculadas con los comandos disponibles en el software, recrean un escenario en el que objetos geométricos pueden ser manipulados y sobre estos se pueden estudiar propiedades y relaciones que podrían pasar inadvertidas a primera vista.

En cuanto a la interfaz gráfica (Figura 6), la pantalla de Geogebra ofrece en la parte superior un conjunto de menús, en los que cada uno contiene distintas herramientas asociadas que guardan relación entre sí. Entre estas herramientas se encuentran aquellas que brindan la posibilidad de construir rectas paralelas, perpendiculares, segmentos, bisectrices de ángulos, mediatrices, puntos medios de segmentos, polígonos regulares, transformaciones en el plano, cónicas y algunos poliedros regulares, por mencionar algunas. Cada objeto construido en pantalla a través de estas herramientas es representado en la vista algebraica (ver Figura 6), donde este se presenta como un par ordenado (si son puntos) o una ecuación algebraica (rectas, circunferencias, entre otros).

Además de la representación algebraica, en las vistas 2D y 3D se representan gráficamente los objetos geométricos construidos. Algo particular de Geogebra, es que todos los objetos construidos en la vista 2D son representados también en la vista 3D, lo cual permite ver a estos no solamente en

[6] Descripción y enlaces de descarga disponibles en https://www.geogebra.org/home
[7] Mayor información en https://www.geogebra.org/institutes
[8] Un listado de los reconocimientos se puede ver en https://www.geogebra.org/about

el plano, sino también en el espacio. En el caso de los objetos geométricos construidos en la vista 3D, solamente se representa en la vista 2D la intersección de dicho objeto con el plano que es visto a través de la vista 2D (ver esfera y circunferencia con centro en F en la Figura 6).

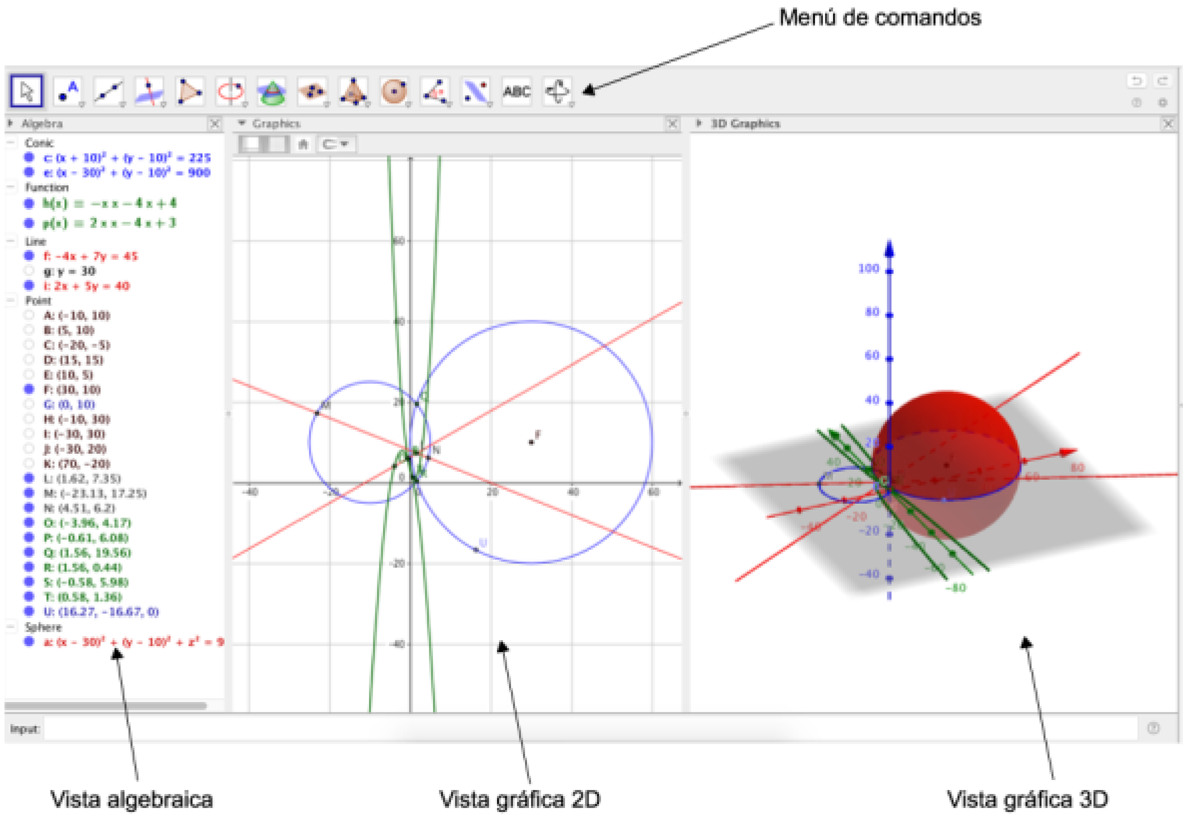


Figura 6. Interfaz gráfica Geogebra (Elaboración propia)

Diseño de la secuencia

Una vez contemplada la población que se involucraría en el estudio y sus características, se procedió a seleccionar los problemas que se propondrían para su desarrollo. En este punto se tuvieron en cuenta algunas consideraciones sobre la naturaleza de los problemas, de tal forma que en su desarrollo se promovieran procesos metacognitivos. Retomando las ideas de Cai (1994), Yimer y Ellerton (2006) y Kuzle (2012), los problemas debían presentar situaciones novedosas, no rutinarias y desafiantes para los estudiantes y en su desarrollo deberían involucrarse los conocimientos que hacían parte del bagaje teórico de los estudiantes. De acuerdo a Mayer (1998), lograr la resolución de este tipo de problemas requiere por parte de quien lo resuelve un conjunto de habilidades enmarcadas dentro de la metacognición, dada la insuficiencia de aspectos de orden cognitivo sin una orquestación adecuada.

Lo anterior demandaba que los contenidos involucrados en los problemas fueran comunes para los estudiantes participantes. En este sentido se buscaron problemas que involucraran elementos teóricos propios del espacio académico Elementos de Geometría (relaciones entre rectas, circunferencias, propiedades de cuadriláteros y triángulos) y que pudieran ser caracterizados como problemas de demostración, esto es, que los estudiantes se embarcaran en la exploración de alguna situación con miras a formular una conjetura y proveer una justificación a la misma. Vale la pena mencionar que los estudiantes de cuarto semestre profundizan y formalizan los aspectos estudiados en el primer curso de geometría a través del segundo y tercer espacio académico, e identifican algunas particularidades de los objetos estudiados que en el primer semestre no son abordadas. En este sentido, el primer espacio académico de geometría ofrece una mirada panorámica sobre los asuntos que en los dos cursos posteriores se trabajan con mayor profundidad y detalle. Esto situaba un escenario equitativo para los participantes en términos de los contenidos involucrados, aun cuando representaba mayor profundidad para los estudiantes de cuarto semestre.

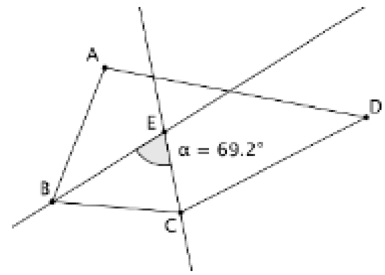
Garantizar que las situaciones problema propuestas a los estudiantes fueran desafiantes, novedosas y no rutinarias conllevó a apoyarse en el recurso tecnológico que mediaba el proceso de resolución. Los problemas propuestos debían situar a los estudiantes en un escenario en el cual i) las condiciones dadas no ofrecieran ayudas sobre el proceso a seguir para el desarrollo, en el cual ii) fuera indispensable apoyarse de las bondades de la geometría dinámica (v.g. arrastre, traza, construcciones auxiliares) para poder operar con los datos disponibles en la búsqueda de soluciones plausibles, descartando estrategias o posibles resultados que a primera vista podrían ser acertados y finalmente, iii) los procesos de visualización y argumentación permitieran el tránsito desde evidencia empírica, presentada en la pantalla del computador, hacia la formulación de conjeturas y la justificación de las mismas apoyadas en elementos teóricos.

Bajo esta perspectiva se realizó una revisión en la literatura con el fin de identificar problemas que atendieran a las consideraciones expuestas líneas atrás. Este proceso llevó a la selección de cuatro problemas que a continuación se presentan. Cada uno está acompañado de un análisis sobre el proceso de resolución en el que media la GD en la formulación de una conjetura y la justificación de la misma con base en algunos elementos teóricos de la geometría plana.

Problema 1	Construya un cuadrilátero que cumpla con la siguiente propiedad: *Las bisectrices de dos ángulos adyacentes del cuadrilátero determinan un ángulo recto.*

<table>
<tr><td></td><td>Formule conjeturas y justifíquelas.</td></tr>
<tr><td>Tomado de:</td><td>Healy, L., & Hoyles, C. (2001). Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6(3), 235–256. http://doi.org/10.1023/A:1013305627916</td></tr>
<tr><td colspan="2">Proceso de resolución</td></tr>
<tr><td colspan="2">Exploración y conjetura:

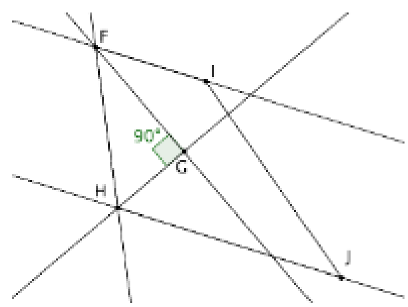
Tres formas de abordar este problema pueden emerger. Una donde se construya un cuadrilátero cualquiera y las bisectrices de dos ángulos adyacentes. Luego los vértices del cuadrilátero se arrastrarían hasta que las bisectrices determinen un ángulo recto.



Una vez se logre determinar un ángulo recto con las bisectrices se podrían arrastrar los vértices del cuadrilátero manteniendo esta propiedad y descubriendo así la relación de paralelismo entre dos lados del cuadrilátero.

Un segundo enfoque involucra construir cuadriláteros particulares (v.g. paralelogramo, trapecio, rombo, rectángulo) y en cada caso construir las bisectrices de dos ángulos adyacentes, observando en qué cuadriláteros la propiedad solicitada se satisface. Esto los llevaría a reconocer que en cuadriláteros con un par de lados paralelos la perpendicularidad de las bisectrices se cumple (paralelogramo y trapecio).

El tercer enfoque involucra partir de la propiedad solicitada. Esto significa construir dos rectas perpendiculares, que harán las veces de bisectrices, luego construir rectas de tal forma que las rectas perpendiculares se conviertan en bisectrices de ángulos y posteriormente construir los vértices del cuadrilátero.



Esta construcción permitirá reconocer el paralelismo entre dos rectas y con ello proponer que el trapecio o el paralelogramo (como un caso particular) son soluciones del problema propuesto.

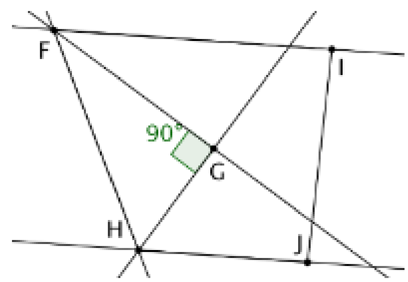
Pertinencia de la geometría dinámica:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Como se puede ver en los tres enfoques presentados, la geometría dinámica tiene un protagonismo y ofrece posibilidades que difícilmente se alcanzarían en otros ambientes. En el primer y tercer caso la función de arrastre permite identificar propiedades (paralelismo) y representar gráficamente las propuestas o intenciones de los estudiantes (mantener o lograr la perpendicularidad de las bisectrices). En el primer caso el trabajo puede ser enriquecido con la traza de los puntos, aspecto que lleva a reconocer el lugar geométrico de los puntos al ser arrastrados manteniendo la propiedad solicitada.

En el segundo caso, aun cuando no se involucran necesariamente funciones de arrastre o traza, la geometría dinámica permite testar distintos casos donde se tiene la sospecha del cumplimiento de la propiedad solicitada. En este caso se</td></tr>
</table>

reconoce la precisión de las construcciones realizadas (paralelismo y perpendicularidad) y de las medidas (medida de ángulos) como respaldo para la toma de decisiones sobre el cumplimiento o no de la propiedad en cada cuadrilátero. La función de arrastre podría involucrarse para verificar si el cumplimiento o no de la propiedad se mantiene en distintas posiciones del cuadrilátero.

Justificación:

Supongamos que la conjetura que se formula, como fruto del trabajo realizado, es:



Si en el $\boxdot\ FIHJ$ se cumple $\overline{FI} \parallel \overline{HJ}$ y las bisectrices de los ángulos F y H se intersecan en el punto G, entonces $\angle FGH$ es recto.

Una posible justificación puede partir de la propiedad que satisfacen $\angle IFH$ y $\angle FHJ$ al estar determinados por rectas paralelas, esta es ser suplementarios o lo que es equivalente, que la suma de sus medidas sea 180.

Luego, como se sabe que $\overrightarrow{FG}$ y $\overrightarrow{HG}$ son bisectrices de $\angle IFH$ y $\angle FHJ$ respectivamente, se puede justificar que la suma de las medidas de $\angle GFH$ y $\angle FHG$ es igual a 90. Finalmente, apoyados en el ΔFGH se puede afirmar que la suma de las medidas de los ángulos internos es 180, lo que en conjunto con la propiedad justificada sobre $\angle GFH$ y $\angle FHG$ permitiría asegurar que $\angle FGH$ es recto.

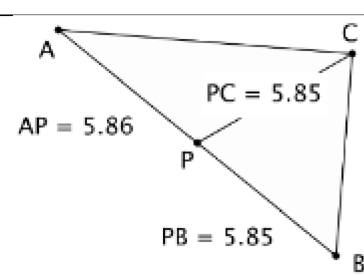
Tabla 5. Análisis problema 1

Problema 2	Sea el ΔABC. Considere un punto P en el $\overline{AB}$ y los ΔAPC y ΔPCB. Formule una conjetura sobre las propiedades del ΔABC que son necesarias para que los ΔAPC y ΔPCB sean isósceles. Justifique sus conjeturas.
Tomado de:	Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *34*(3), 66–72. http://doi.org/10.1007/BF02655708

Proceso de resolución

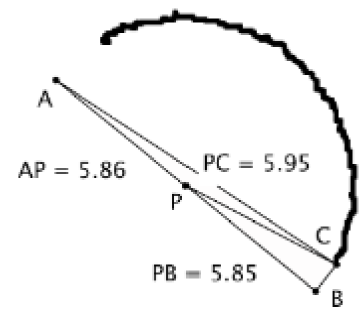
Exploración y conjetura

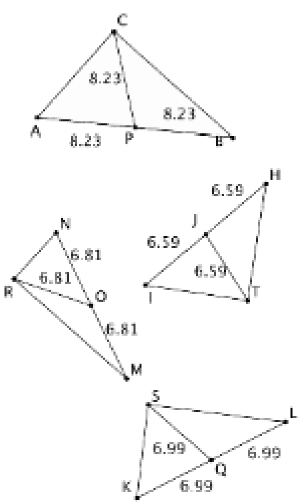
Una primera forma de explorar este problema corresponde a representar gráficamente las condiciones dadas y arrastrar los puntos hasta que las condiciones necesarias para obtener triángulos isósceles se satisfagan. En este punto la función de arrastre y las medidas de las longitudes de los segmentos se deben combinar en la búsqueda de congruencias entre dos parejas de segmentos, de tal suerte que una configuración como la



presentada en la imagen de la derecha se obtenga. En esta representación se puede asegurar que ΔAPC y ΔPCB son isósceles.

Una vez obtenida la condición solicitada, es tarea descubrir las propiedades del ΔABC que hacen que esta condición siempre sea cierta, lo que puede llevar a los estudiantes a utilizar las funciones de arrastre y traza para descubrir propiedades de los objetos involucrados. En este ejercicio se podría descubrir que al mover el punto *C*, tratando de mantener una congruencia entre $\overline{PC}$, $\overline{PB}$ y $\overline{PA}$, este describe una semicircunferencia y que la congruencia entre $\overline{PB}$ y $\overline{PA}$ se da en tanto el punto P sea punto medio del $\overline{AB}$. Estos resultados llevarían a proponer que la condición necesaria para que ΔAPC y ΔPCB sean isósceles es que el punto C pertenezca a la semicircunferencia cuyo diámetro es $\overline{AB}$ y centro es el punto P.



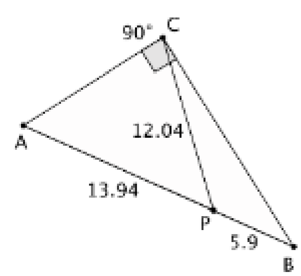


Otro enfoque para abordar el problema lleva a realizar las acciones contempladas en la primera parte de la anterior propuesta. Esto es, construir el triángulo y arrastrar los puntos hasta obtener una configuración en la que las condiciones se satisfagan. Sin embargo, en esta oportunidad no se involucraría la traza y el arrastre en conjunto. Más bien, podrían darse dos posibilidades que llevarían al mismo resultado. En primer lugar, podrían construirse distintos triángulos cuyas configuraciones atiendan a lo solicitado en el enunciado del problema, teniendo así muchos "casos" con la propiedad deseada.

En segundo lugar, sin necesidad de construir otros triángulos, podría arrastrarse el punto *C* tratando de buscar otros casos en los que se satisfaga la condición del problema, sin que esto requiera que el valor de las medidas de los lados se conserve. En ambos casos, tras haber ensayado con distintos casos, aun cuando se hace de distinta forma, podría visualizarse una propiedad en el ΔACB, particularmente que $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ o lo que es equivalente, que $\angle ACB$ es recto y que el punto *P* es punto medio del $\overline{BA}$.

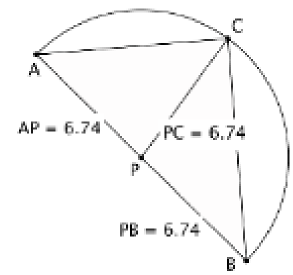
Esto podría llevar a los estudiantes a realizar una construcción robusta de la situación, en la que se parta de ΔABC con $\angle ACB$ recto y *P* sea punto medio de $\overline{BA}$, verificando que ΔAPC y ΔPCB son isósceles en todo momento.

Si la propiedad del punto *P* no se ha descubierto, es en este punto que puede identificarse esta, dado que ubicar al punto P en cualquier lugar de la hipotenusa del triángulo no siempre arrojaría el resultado deseado y este solo se alcanzaría en tanto *P* sea punto medio del $\overline{BA}$, lo cual se lograría con ayuda de la función de



<table>
<tr><td>arrastre.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Pertinencia de la geometría dinámica:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Este problema, bajo el proceso de solución contemplado en este análisis, demanda funciones de la geometría dinámica como la traza y el arrastre, quienes de manera conjunta permiten evidenciar un lugar geométrico que promovería formular una conjetura. La combinación de estas dos funciones es necesaria en cuanto hay dos tareas en las que los estudiantes se ven involucrados. Por un lado, arrastrar el punto C manteniendo la congruencia entre algunos segmentos y por otro lado visualizar el lugar geométrico sobre el cual el punto se debe mover con el fin de mantener esta propiedad de congruencia. En ese punto la traza es de gran ayuda en cuanto permite a los usuarios concentrarse en la primera condición (congruencia) y deja la tarea de evidenciar el lugar geométrico a la observación de la huella dejada por el punto, una vez se finalice el arrastre del punto C. Otras configuraciones que respondan a la tarea pueden ser encontradas, así como procesos de exploración llevados a cabo por los estudiantes, sin embargo, hacemos mención a esta en cuanto permite evidenciar el potencial de la geometría dinámica en el proceso de resolución del problema propuesto.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Justificación</td></tr>
<tr><td>De acuerdo a la primera exploración contemplada, supongamos que la conjetura que se formula, como fruto del trabajo realizado, es:

Si C es un punto de la semicircunferencia cuyo diámetro es $\overline{AB}$ y centro es P, entonces ΔAPC y ΔPCB son isósceles.

En este caso puede justificarse que por ser el punto P centro de la semicircunferencia, se cumple una congruencia entre $\overline{PC}$, $\overline{PB}$ y $\overline{PA}$, lo que permite asegurar que ΔAPC y ΔPCB son isósceles.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>En la segunda exploración presentada es posible que la conjetura que se formule sea la siguiente:

Si en el ΔABC el $\angle ACB$ es recto y P es punto medio $\overline{AB}$, entonces ΔAPC y ΔPCB son isósceles.

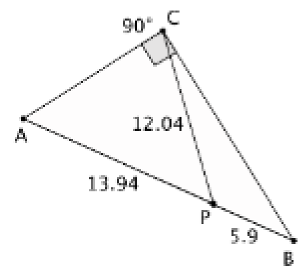
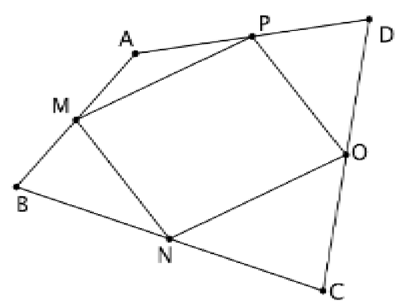
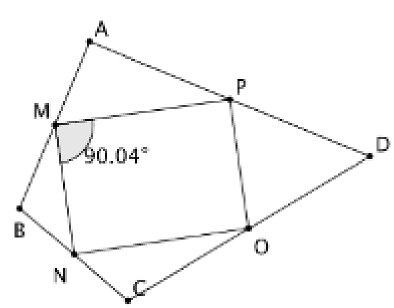
Para justificar esto se puede utilizar un resultado de la geometría plana que dice que si $\angle ACB$ es recto, entonces C es un punto de la semicircunferencia cuyo diámetro es $\overline{AB}$. Esto, sumado a la propiedad del punto P permite utilizar los argumentos expuestos en el primer caso, de forma tal que se justifica esta segunda conjetura.</td><td>
</td></tr>
</table>

Tabla 6. Análisis problema 2

Problema 3	Sea el ⊡ ABCD y M, N, O y P puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ respectivamente. Determine las propiedades que debe cumplir el ⊡ ABCD para que ⊡ MNOP sea rectángulo.

<table>
<tr><td></td><td>Formule una conjetura y justifíquela.</td></tr>
<tr><td>Tomado de[9]:</td><td>Villiers, M. De. (2007). Proof in Dynamic Geometry: More than Verification. In D. Pugalee, A. Rogerson, & A. Schink (Eds.), Proceedings of the 9th International Conference in Mathematics Education in the Global Community, The Mathematics Education into the 21 Century Project (pp. 155–159). Charlotte, North Carolina. Retrieved from http://math.unipa.it/~grim/21_project/21_charlotte_deVilliersPaperEdit.pdf</td></tr>
<tr><td colspan="2">Proceso de resolución</td></tr>
<tr><td colspan="2">Exploración y conjetura</td></tr>
<tr><td colspan="2">Este problema puede ser explorado de dos formas distintas. Una diferencia entre ellas es la generalidad de la respuesta que se puede obtener en cada caso, como veremos a continuación. En el primer caso se puede proceder construyendo distintos cuadriláteros conocidos por los estudiantes (v.g. cuadrado, rectángulo, trapecio, cometa) y en cada uno se construirían los puntos medio de los lados, determinando así en cada caso el $\boxdot$ MNOP. En un momento posterior se evaluaría en qué casos se determina un rectángulo, obteniendo que esto ocurre en el cuadrado, rombo y cometa.</td></tr>
<tr><td>En el segundo caso se puede proceder a construir un cuadrilátero cualquiera y en este se determinarían los puntos medios de sus lados y con ello el $\boxdot$ MNOP. A través de la función de arrastre se podría identificar en un primer momento que independientemente del cuadrilátero representado, el $\boxdot$ MNOP siempre es un paralelogramo. Ahora la tarea es manipular los puntos A, B, C y para que el $\boxdot$ MNOP sea rectángulo. Esto podría requerir la medida de los ángulos del cuadrilátero interior, con el fin de realizar un arrastre sobre los puntos A, B, C y D que permita obtener un valor de medida igual a 90.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Una vez se logre una medida de 90 en los ángulos del $\boxdot$ MNOP, se iniciaría una exploración sobre las propiedades del $\boxdot$ ABCD con miras a formular alguna generalidad sobre este cuadrilátero. La configuración del $\boxdot$ ABCD podría no sugerir alguna relación de congruencia, paralelismo o perpendicularidad entre sus lados, lo que descartaría en inmediato que en algún cuadrilátero conocido esta propiedad se cumpla. Esto realmente es afortunado, ya que permite continuar la exploración con miras a detectar una propiedad en el $\boxdot$ ABCD que no involucre sus lados o ángulos.

Un ejercicio de visualización en distintas configuraciones del $\boxdot$ ABCD</td><td>
</td></tr>
</table>

[9] El enunciado original ha sido modificado para el cumplimiento de los intereses de este estudio.

<table>
<tr><td>en el que el ⊡ MNOP es rectángulo permitiría evidenciar que las diagonales del ⊡ ABCD son perpendiculares, propiedad necesaria y suficiente para garantizar que ⊡ MNOP, bajo las condiciones que tienen sus vértices, es rectángulo.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Pertinencia de la geometría dinámica:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aunque en las dos propuestas de exploración presentadas se involucra la geometría dinámica, debe señalarse que la segunda propuesta hace que la función de arrastre sea protagonista en el proceso de solución y permita reconocer una propiedad general que incluye las respuestas dadas a través de la primera propuesta. En la primera propuesta se realiza una exploración apoyada en el análisis de casos, lo cual conlleva a descartar o validar propuestas, pero que en definitiva deja unos resultados muy particulares, entre los que difícilmente se podría establecer alguna generalidad, como lo es la perpendicularidad de sus diagonales, ya que la exploración que se realiza a través de estos múltiples casos atiende principalmente a propiedades de congruencia, paralelismo y perpendicularidad entre sus lados, más que sus diagonales. Aun así, el proceso presentado en la primera propuesta requiere de la precisión en la construcción y medidas que Geogebra ofrece, aspecto que permite tomar decisiones sobre la pertenencia o no de un tipo particular de cuadrilátero en el conjunto solución del problema abordado.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Justificación</td></tr>
<tr><td>En la segunda exploración presentada es posible que la conjetura que se formule sea la siguiente:

Si en el ⊡ ABCD se cumple $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ y M, N, O y P son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ respectivamente, entonces ⊡ MNOP es rectángulo.

Para justificar esta conjetura se puede utilizar un resultado de la geometría plana que afirma que el segmento determinado por los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado del triángulo; esto permitiría asegurar que $\overline{MP} \parallel \overline{BD}$, $\overline{NO} \parallel \overline{BD}$, $\overline{OP} \parallel \overline{AC}$ y $\overline{AC} \parallel \overline{MN}$. En seguida se podría afirmar, que $\overline{MP} \parallel \overline{NO}$ y $\overline{OP} \parallel \overline{MN}$, lo que llevaría a deducir que el ⊡ MNOP es paralelogramo.

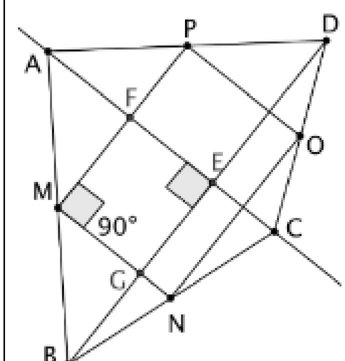
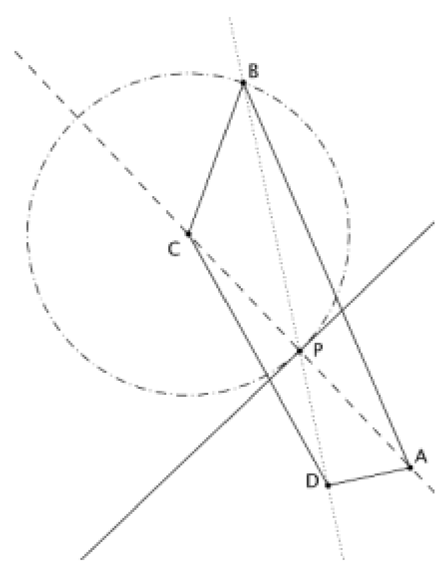
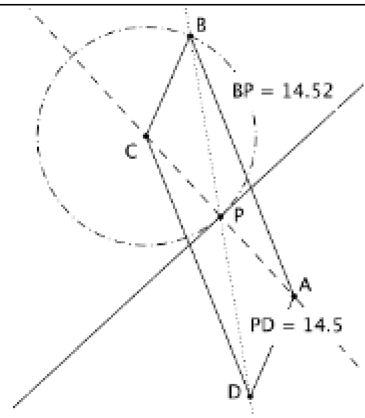
De manera análoga se podría afirmar que ⊡ MFEG es paralelogramo y al ser $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, el $\angle FEG$ es recto, lo que implica que ⊡ MFEG es rectángulo, ya que sería un paralelogramo con un ángulo recto. Esto último permitiría también asegurar que ⊡ MNOP es rectángulo, ya que al ser ⊡ MFEG rectángulo, todos sus ángulos son rectos, en particular el $\angle FMG$.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Las conjeturas derivadas de la primera exploración no las justificamos en cuanto, al ser casos particulares de la conjetura ya justificada, los argumentos involucrados guardan familiaridad con los expuestos arriba.</td></tr>
</table>

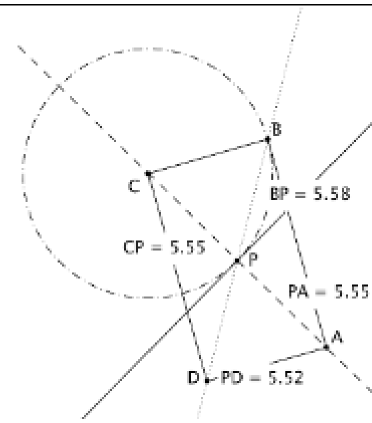
Tabla 7. Análisis problema 3

<table>
<tr><td>Problema 4</td><td>
a. Dibuje un punto P y una recta r que lo contiene.
b. Construya la recta perpendicular por el punto P a la recta r.
c. Dibuje un punto C en esta nueva recta distinto al punto P.
d. Construya un punto A de tal forma que P sea punto medio del $\overline{AC}$.
e. En el semiplano determinado por la recta r que contiene al punto A dibuje un punto D.
f. Construya la $\overleftrightarrow{PD}$.
g. Construya la circunferencia con centro C y radio CP.
h. Sea B el segundo punto de intersección de la $\overleftrightarrow{PD}$ y la circunferencia construida con centro en C.
i. Construya el ⊡ $ABCD$.
Elabore conjeturas sobre los tipos de cuadriláteros que pueden determinarse, describiendo las formas en que se obtienen dichos cuadriláteros. Justifique estas conjeturas.
¿Qué propiedad debe cumplir el punto D para que el ⊡ ABCD sea paralelogramo?
</td></tr>
<tr><td>Tomado de:</td><td>Baccaglini-Frank, M., & Mariotti, A. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15(3), 225–253. http://doi.org/10.1007/s10758-010-9169-3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Proceso de resolución</td></tr>
<tr><td colspan="2">Exploración y conjetura</td></tr>
<tr><td>
Dado que en el enunciado de este problema se proveen los pasos de una construcción y sobre esta deben identificarse condiciones que conlleven a la obtención de un tipo particular de cuadrilátero, la exploración que podría realizarse consiste en manipular los puntos que sea posible, buscando que en pantalla se determine un cuadrilátero familiar. En este sentido, es probable que las acciones se encaminen en intentar que el ⊡ $ABCD$ adopte una configuración particular.

Sin embargo, hay tipos de cuadrilátero en los que el ⊡ $ABCD$ no puede convertirse como lo son cometa, trapecio, cuadrado o rombo, dejando como únicas posibilidades paralelogramos y rectángulos. Para que se obtenga la primera configuración se debe satisfacer que el punto P sea punto medio del $\overline{BD}$ en adición a las condiciones ya dadas. Para que se obtenga la segunda configuración se debe cumplir que los segmentos determinados por el punto P y los vértices del cuadrilátero sean congruentes.
</td><td>


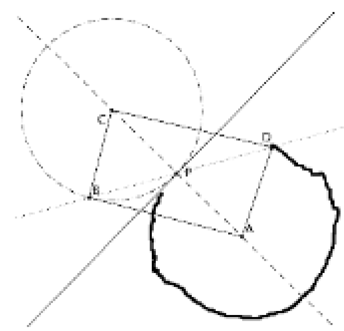
</td></tr>
</table>





Otra forma de explorar este problema, con el fin de identificar las propiedades del punto D que hacen que el $\boxdot\, ABCD$ sea paralelogramo o rectángulo, involucra arrastrar ese punto manteniendo, por lo menos de manera visual, la configuración de un paralelogramo (utilizando para ello la imagen prototípica de este cuadrilátero).

En este punto la traza permitiría descubrir una propiedad interesante y poco evidente para el punto *D*, esta es, que este punto pertenezca a la circunferencia con centro *A* y radio *PA*. Esto movilizaría posiblemente al estudiante a construir esta circunferencia con el fin de corroborar su conjetura, reconociendo la validez de la misma y la condición que hace que el $\boxdot\, ABCD$ sea paralelogramo.



Falta ahora formular una propiedad que haga que el $\boxdot\, ABCD$ sea rectángulo. En este punto puede involucrarse la condición de que los $\overline{PD}$ y $\overline{PA}$ sean congruentes, como se mención en la anterior exploración.

Pertinencia de la geometría dinámica:

Una exploración como la mencionada anteriormente, encaminada a reconocer qué cuadriláteros no son posibles de representar a través del $\boxdot\, ABCD$, y cuáles sí, incluyendo las condiciones que esto requeriría, permiten asegurar que la función de arrastre, combinada con las medidas de las longitudes de algunos segmentos o ángulos, se vuelven protagonistas dentro de un proceso en el que la visualización cobra un papel relevante también. En la segunda propuesta de exploración se aprecia que la traza es vital para el descubrimiento del lugar geométrico al que pertenece el punto *D*, esto sumado nuevamente a la percepción visual que se pone en juego para que al arrastrar el punto en mención la configuración de paralelogramo se mantenga.

Justificación

La justificación de las conjeturas formuladas en la primera exploración se da de manera rápida por dos resultados de la geometría asociados a cuadriláteros. Particularmente, el primer resultado, referido a las condiciones para obtener un paralelogramo, se puede justificar gracias al hecho de que, si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan, este

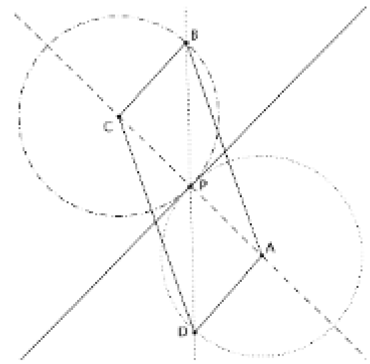
<table>
<tr><td colspan="2">cuadrilátero es paralelogramo. Este hecho puede utilizarse dado que se cuenta con las condiciones solicitadas por el enunciado. Ahora, respecto al resultado que sitúa las condiciones para obtener un rectángulo, este se puede justificar por un hecho que afirma en si en un cuadrilátero las diagonales se bisecan y son congruentes, el cuadrilátero es rectángulo.</td></tr>
<tr><td>La propiedad obtenida en la segunda exploración, en la que se obtiene un paralelogramo, puede ser justificada de la siguiente forma. Sabiendo que el punto P es punto medio del $\overline{CA}$ y que los puntos B y D pertenecen a circunferencias con centros en C y A y radios CP y PA respectivamente, se puede asegurar que los $\overline{CB}$ y $\overline{DA}$ son congruentes y que ΔPCB y ΔPAD son isósceles. Esto último y el hecho de que $\angle APD$ y $\angle CPB$ son congruentes por ser opuestos por el vértice, permite afirmar que $\angle CBP$ y $\angle PDA$ son congruentes. Bajo esta premisa, $\overline{CB} \parallel \overline{AD}$, dado que los últimos ángulos congruentes son alternos internos. Ahora, como $\overline{CB}$ y $\overline{DA}$ son paralelos y congruentes, el $\boxdot\ ABCD$ es paralelogramo.</td><td>
</td></tr>
</table>

Tabla 8. Análisis problema 4

ACOPIO DE DATOS

Una vez seleccionados los problemas se procedió a trabajar con los estudiantes para observar y registrar sus estrategias de solución. Para ello se conformaron parejas entre los estudiantes del mismo semestre. Esta decisión atendía a las consideraciones de Goos y Galbraith (1996), Artzt y Armour-Thomas (1992) y Schoenfeld (1985), quienes proponen el trabajo por parejas o grupos pequeños en el marco de la resolución de problemas con el fin de atender limitaciones de metodología del análisis de protocolos como la no completitud de la información y la presión ejercida por el desarrollo del problema para quien la afronta. Estos autores señalan que el trabajo conjunto provoca discusiones entre los miembros sobre la validez de las propuestas, lo que lleva a reflexionar y monitorear sobre el pensamiento propio y el del compañero, asuntos relacionados a la co-regulación. En consecuencia, esto estimularía la actividad metacognitiva en un nivel social y la haría observable.

Cada pareja contó con un computador con el programa de geometría dinámica Geogebra y un archivo de texto que presentaba los enunciados de los problemas en el mismo orden que se presentaron en el anterior apartado. El investigador, autor de este documento, estuvo con los grupos durante el proceso de solución sin que tomara parte de la discusión sostenida por parte de los estudiantes. El rol del investigador era fundamentalmente solicitar a los estudiantes que verbalizaran sus pensamientos cuando se presentaban pausas o silencios prolongados con el fin de que estos pudieran ser registrados. Todas estas acciones atendían a lo sugerido por Schoenfeld (1985), con lo que se esperaba no desviar la atención de los estudiantes sobre el trabajo realizado. Igualmente, cuando alguna estrategia o idea comunicada no era lo suficientemente clara, el investigador solicitaba que se precisara y se explicara con mayor detalle, esto con el fin de tener evidencias de las acciones y las intenciones que las movilizaban. El investigador no ofrecía respuestas a los estudiantes respecto a la validez del proceso de resolución y tampoco respondía a las inquietudes que los estudiantes le pudieran comunicar.

Para el registro del proceso de resolución se utilizó el software Camtasia[10], el cual registraba la interacción llevada a cabo en la pantalla del computador, el audio de las conversaciones sostenidas entre los estudiantes y una captura, con ayuda de la cámara frontal del computador, de la interacción sostenida por ellos, sus gestos, reacciones, expresiones y demás manifestaciones corporales que pudieran brindar mayor evidencia sobre el trabajo realizado dentro del proceso de resolución. Una vez finalizado el trabajo alrededor de algún problema, Camtasia compila todas estas fuentes de datos en un único video; las hojas con las producciones escritas de los estudiantes al abordar cada problema también se acopiaron, como complemento a lo registrado en los videos. Adicional a estas fuentes, al finalizar el trabajo con cada grupo, el investigador realizaba algunas preguntas a los integrantes de los grupos con el fin de obtener mayor información sobre episodios que llamaran la atención del investigador o que requirieran una explicación sobre su naturaleza por parte de los estudiantes. Finalmente, los archivos de Geogebra que recogían las acciones de los estudiantes al afrontar cualquier problema se almacenaron junto a los videos, esto en cuanto posiblemente se podría requerir reconstruir el proceso de resolución, involucrando para tal fin la herramienta de Protocolo de Construcción de Geogebra.

ANÁLISIS RETROSPECTIVO

Cuando se finalizó la recolección de los datos, estos se analizaron en atención a la pregunta de investigación y los objetivos declarados. En este punto se involucró la metodología de Análisis de

[10] La página del software junto a una descripción del mismo se encuentra disponible en https://www.techsmith.com/camtasia.html

Protocolos[11] (Maldonado, 2001; Sanabria, 2014), técnica de investigación cualitativa interpretativa que indaga en el contenido del pensamiento de las personas al resolver problemas o tareas y que permite identificar las estrategias que siguen al involucrarse en estas o el conocimiento involucrado al tomar decisiones (Sanabria, 2014). Sanabria asegura que son varias las investigaciones que han utilizado el Análisis de Protocolos para indagar el comportamiento de los estudiantes, al interactuar con escenarios computacionales cuando resuelven tareas o problemas, con el objetivo de estudiar las estrategias cognitivas y metacognitivas que estos sujetos manifiestan. Schoenfeld (1985) señala que esta metodología es confiable e informativa, captura la esencia del proceso de resolución de un problema y permite reconocer los motivos o condiciones que llevan al éxito o falla de este proceso. De manera paralela se quería indagar sobre el proceso mismo de resolución, los episodios observados y el tránsito entre ellos, así como la presencia de la GD en este proceso.

Proceso del Análisis de Protocolos

En un momento inicial se requiere que los participantes sean entrenados para expresar en voz alta lo que piensan mientras resuelven algún problema. Maldonado (2001) afirma que solicitarle a un individuo que verbalice su pensamiento, mientras resuelve un problema, lleva a una ampliación de la cantidad de la información disponible con respecto a observar a un individuo resolver un problema en silencio. Una vez esto se realiza, se lleva a cabo un ejercicio sistemático en el que se rastrean los estados cognitivos del sujeto al resolver los problemas. Esto involucra expresiones verbales, icónicas o corporales. En la metodología del Análisis de Protocolos tienen presencia seis momentos principalmente (Sanabria, 2014, p. 126) a través de los cuales se analiza la información recogida y se avanza en la elaboración del modelo de pensamiento de una persona al resolver un problema. Estos momentos se describen sucintamente a continuación.

- Registro del protocolo: captura de información de acciones verbales y no verbales a través de medios como grabación o toma de notas.

---

[11] Un protocolo es (Sanabria; 2014; citando a Hayes y Flower, 1980) una descripción sistemática de las actividades, ordenadas en el tiempo, de lo que los sujetos enfrentan mientras realizan una tarea o resuelven un problema. Los protocolos emergen de la verbalización y actuación de los sujetos al abordar este tipo de situaciones y permiten identificar estrategias y generar modelos sobre su comportamiento.

- Transcripción: de manera fiel se convierte la información acopiada a un formato escrito, lo que genera un conjunto de expresiones que lleva a determinar todo lo que sucedió en el transcurso de la tarea.
- Segmentación: el protocolo se divide en unidades pequeñas determinadas por eventos (v.g. pausas, entonaciones) que evidencien la completitud de frases u oraciones; se tienen en cuenta también eventos como cambios en la intención del sujeto, en lo que está pensando/involucrando, sus acciones mismas.
- Agregación: identificación de los episodios que se constituyen en evidencia para ser clasificados de acuerdo al esquema de codificación o la concepción teórica adoptada.
- Codificación: basado en un esquema que determina categorías para asimilar los episodios, se interpretan sistemáticamente las acciones cognitivas de una persona, provenientes del protocolo.
- Interpretación: análisis de la codificación realizada con miras a caracterizar el comportamiento de los individuos y brindar una explicación sobre el mismo y sus consecuencias o resultados.

El primer momento se describió en el anterior apartado (**acopio de datos**). Respecto al segundo (**transcripción**), los audios de las grabaciones realizadas fueron transcritos utilizando un formato de cuatro columnas (ver Tabla 9) en los que se asignaba un número consecutivo a las intervenciones de los estudiantes, se registraba el nombre del estudiante que intervenía, su intervención, el episodio de resolución en el que se encontraba el grupo y el tiempo en el que este iniciaba. Posteriormente, las transcripciones fueron fragmentadas (**segmentación**) teniendo en cuenta los cambios en las intenciones de los sujetos durante el proceso de resolución, esto es, los enfoques u objetivos que se establecían o ejecutaban. Esto permitió convertir cada protocolo registrado en un conjunto secuencial de bloques. Sobre el proceso de **Agregación** hay que mencionar que no se realizó un ejercicio de selección sobre los bloques obtenidos, esto en cuanto cada acción realizada por los estudiantes, aun cuando fuera improductiva, difusa o repetitiva, brindaba información sobre el proceso de resolución, las motivaciones que subyacen a estas acciones y la comprensión del problema mismo. Estas decisiones se clarificarán cuando se presente el modelo teórico adoptado.

No	Est	Intervención	Ep	T
123	Carlos	El uso de […] denota alguna pausa en su intervención. Los comentarios dentro de “[ ]” indican alguna aclaración sobre la intervención (gestual o icónica).	L	00:10

Tabla 9. Formato de transcripción

Para **codificar** los episodios obtenidos, tras el proceso de segmentación, así como las acciones ejecutadas por los estudiantes al interior de estos, se involucró el modelo teórico de Kuzle (2011, 2015a), el cual se apoya en elementos de Schoenfeld (1981, 1985) y otros autores. Una descripción de este modelo ya se presentó en el capítulo anterior (apartado: Episodios de la resolución de problemas). Apoyados en el modelo teórico presentado se procedió a codificar cada uno de los episodios obtenidos tras el proceso de segmentación. En este punto se evidencia la pertinencia de involucrar todos los episodios, en cuanto cada uno podía llegar a reportar aspectos que podrían ser enmarcados dentro de alguno de los episodios contemplados en el modelo teórico. En el ejercicio de clasificar cada bloque de la transcripción se reconocieron comportamientos de orden metacognitivo, llevando así a establecer una caracterización de cada grupo respecto a los procesos metacognitivos que involucra al resolver problemas de demostración con ayuda de la geometría dinámica.

La **interpretación**, último momento del proceso de Análisis de Protocolos, se realizó sobre la codificación realizada y los episodios reconocidos en la forma de proceder de cada grupo al abordar los problemas propuestos. En este punto se tuvieron en cuenta las estrategias, acciones y patrones de comportamiento de los grupos con miras a elaborar un modelo de su actuación. Este modelo, considerando el éxito o fracaso en la resolución de cada problema, permitió reconocer algunos motivos o factores que conllevaron a tal resultado. Adicionalmente, la interpretación de la información permitió decantar aspectos sobre la pertinencia y efectividad de la geometría dinámica como recurso de mediación, el papel de la interacción social sostenida entre los estudiantes, vista desde la metacognición en el nivel social, y otros que llamaron la atención en el ejercicio analítico, los cuales incidieron en el proceso de resolución de los problemas propuestos.

Un episodio emergente

Al involucrar el modelo propuesto por Kuzle en el análisis de los protocolos, derivados de la resolución de problemas, se pudo observar que no todas las acciones realizadas por los estudiantes podían ser "codificadas" en términos de los episodios del modelo en mención. Particularmente, se reconocieron momentos del proceso de resolución en los que los estudiantes, al ejecutar acciones relativas a la implementación, verificación o análisis de la situación estudiada, con o sin ayuda de GD, establecían resultados parciales que obedecían a una estructura condicional y recogían sus hallazgos o resultados parciales del trabajo realizado. Igualmente, dada la naturaleza del tipo de problemas abordados, en el momento en que se daba cierre a episodios cuya finalidad era el reconocimiento de algunas características o propiedades y estas debían ser expresadas a través de una conjetura, las acciones de los estudiantes no se enmarcaban en alguno de los episodios contemplados en el modelo adoptado. Esto llevó a la consideración de un nuevo tipo de episodio a través del cual se establecieran resultados parciales o finales del trabajo realizado, en el cual se realizarán acciones dirigidas a condensar la información acopiada.

Bajo este panorama se propuso un nuevo episodio que complementa el modelo adoptado, este episodio se denominó Síntesis. La siguiente es una descripción del mismo.

Síntesis	En este episodio se realizan acciones de recapitulación sobre los resultados que se han obtenido al realizar distintos esfuerzos al resolver el problema. Estos resultados pueden provenir de la exploración realizada sobre una situación particular, el análisis de la misma o las creencias de quien afronta el problema.

Tabla 10. El episodio de síntesis

Una revisión literaria permite reconocer que en otras investigaciones ya se ha reconocido este episodio como una fase de la resolución de problemas, particularmente cuando en esta media la geometría dinámica. Ejemplo de ello es Özen y Köse (2013), quienes en su revisión sobre la resolución de problemas y el uso de geometría dinámica, proponen fases principales en el proceso de resolución en estos ambientes como la construcción, exploración, conjetura y validación (Mogetta, Olivero y Jones, 1999; citado en Özen y Köse, 2013). También se reconoce el trabajo de Lárez (2014), quien propuso un modelo para abordar la demostración geométrica en el que se contemplan cinco etapas: construcción, información, conjeturas, encadenamiento de argumentos y evaluación o monitoreo. Lo anterior es muestra de la pertinencia de esta fase de resolución en el modelo adoptado, pues se reconoce también que la propuesta de Kuzle no abarca el trabajo realizado en la resolución de problemas de demostración

RESULTADOS

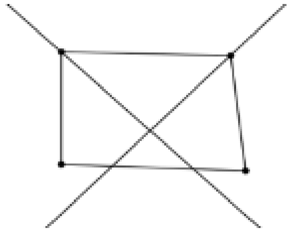
En este capítulo presentamos la segmentación y codificación de los protocolos que se obtuvieron al transcribir los videos que registraban el proceso de resolución de los problemas propuestos a los grupos. Para ello haremos un recuento del proceso de resolución de cada problema involucrado por parte de los grupos, identificando la emergencia de episodios durante este proceso y los comportamientos metacognitivos (CM) observados en estos. Debido a la extensión de la segmentación y codificación, solo presentamos en este capítulo en análisis realizado respecto al primer problema por parte de cada grupo. El análisis correspondiente a los otros tres problemas se presenta en la sección de anexos (Anexo 1). Los episodios observados se presentan utilizando su letra inicial (Lectura –L-, Comprensión –C-, Análisis –A-, Exploración –E-, Planeación –P-, Implementación –I-, Verificación –V- y Síntesis -S-). Los nombres originales de los estudiantes han sido cambiados por seudónimos, con las palabras *Gru* e *Inv* hacemos referencia a intervenciones realizadas por ambos estudiantes y por el investigador respectivamente.

LAS BISECTRICES DEL CUADRILÁTERO

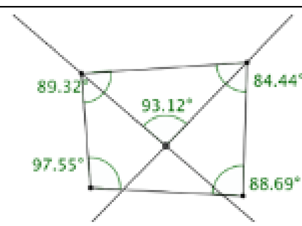
El primer problema propuesto solicitaba que se identificaran las propiedades que debía cumplir un cuadrilátero para que las bisectrices de dos ángulos adyacentes fueran perpendiculares. El primer grupo, conformado por Caro y Paul, requirió 22 minutos para su desarrollo, mientras que el grupo de Juan y Ana gastó 48 minutos para resolverlo.

La estrategia de Caro y Paul

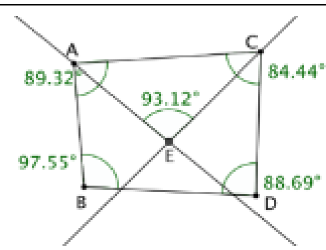
N	Est	Intervención	Ep	T
1	Caro	[Lee el enunciado]	L	00:35
2	Paul	Empecemos con Geogebra [abre Geogebra]. Hagamos primero el cuadrilátero [maximiza la pantalla de Geogebra]. ¿De una vez el cuadrilátero? [navega entre algunas herramientas mientras habla]	P	00: 52
3	Caro	Haz un cuadrilátero cualquiera y pues lo vamos arrastrando…		
		[Paul selecciona la herramienta “polígono”. Luego dibuja dos puntos, pero accidentalmente hace doble clic al dibujar el segundo, lo que abre una ventana para modificar propiedades de los puntos. Ella cancela esta opción y la construcción realizada se borra de la pantalla]		
4	Paul	No me deja, vamos a hacer los puntos [selecciona la herramienta punto y dibuja cuatro puntos]	I	01:17
5	Caro	Los segmentos… [Paul selecciona ahora la herramienta segmento y construye		

		cuatro segmentos determinados por los puntos en pantalla, de forma tal que se determina un cuadrilátero] Ven construimos las bisectrices de esos ángulos.		
[Paul selecciona la herramienta bisectriz y procede a construir las bisectrices de dos ángulos adyacentes del cuadrilátero como se muestra a continuación]				
6	Caro	Solo necesitamos dos, ¿cierto?		
7	Paul	Sí.		

Caro inicia realizando una lectura del enunciado [1] sin hacer énfasis o repetir alguna parte del mismo [Lectura]. Una vez termina de leerlo, Paul sugiere involucrar Geogebra y construir un cuadrilátero [Planeación], preguntando a Caro sobre la pertinencia de esta idea [2], a lo que Caro manifiesta aceptación y sugiere además que posterior a esta acción se arrastren los vértices del cuadrilátero para observar alguna relación [3]. Una vez Paul representa gráficamente el cuadrilátero [Implementación], Caro le pide que construya las bisectrices de los ángulos involucrados. Al final retoman las condiciones del problema para que la cantidad de bisectrices construidas corresponda a las solicitadas [6,7].

8	Caro	Ven y tomamos entonces las medidas de los ángulos del cuadrilátero [selecciona la herramienta ángulo] y pues vamos mirando entonces… en qué caso se cumple eso [determina las medidas de los ángulos del cuadrilátero para los cuales se construyeron sus bisectrices].	P	02:54
9	Paul	Pero tacho. ¿Tienen que ser los ángulos de 90 o las que determinan las bisectrices?		
10	Caro	El ángulo que determina las bisectrices tiene que ser recto.	C	03:10
11	Paul	Ah bueno.		
12	Caro	Ponemos los puntos de intersección acá [determina el punto de intersección de las bisectrices]. Tomamos la medida también…		
13	Paul	Con este [señalándole la herramienta adecuada para determinar la medida].		
[Caro determina la medida del ángulo determinado por las bisectrices y de los otros dos ángulos del cuadrilátero]			I	03:18
14	Inv	¿Para qué toman la medida de los ángulos del cuadrilátero?		
15	Caro	Para determinar qué tipo de cuadrilátero es.		

Ahora Caro determina las medidas de los ángulos a los que se les construyó su bisectriz y considera que se manipule [Planeación] el cuadrilátero con el fin de identificar las propiedades de este [8], en función de sus ángulos, que hacen que la perpendicularidad de las bisectrices se satisfaga [… y pues vamos mirando entonces… en qué caso se cumple eso]. Para Paul no es claro qué ángulos deben ser rectos [9], por lo cual Caro le comenta que es el ángulo determinado por las bisectrices el que debe medir 90 [Comprensión]. Caro finaliza hallando las medidas de los otros ángulos del cuadrilátero y la del ángulo determinado por las bisectrices [Implementación] a la vez que hace explícito que, con base en estos, determinarán el tipo de cuadrilátero para el cual las bisectrices son perpendiculares [14,15].

16	Paul	Ahora sí arrastra los puntos.		
17	Caro	Arrástralos tu [Paul arrastra uno de los vértices del cuadrilátero sin manifestar alguna intención]. Pues cuando es un trapezoide no se cumple.		
18	Paul	Yo creo que si estos dos ángulos son congruentes de pronto…		
19	Inv	¿Qué dices?		
20	Paul	Si estos dos ángulos, los opu… [Con sus manos señala un ángulo del cuadrilátero y su opuesto] sí, los opuestos.		
21	Inv	¿Puedes nombrar los puntos por favor?		
[Paul nombra los puntos como se ve en la figura]				
22	Paul	Entonces yo creo que si los ángulos, el ángulo ABD y el ángulo ACD son congruentes, de pronto se puede cumplir.	E	03:58
23	Caro	Muévelo a ver… si se cumple… 98 [Paul mueve el punto B, al parecer tratando de que la medida del ángulo ABD sea 98, misma medida del ángulo ACD]. Va en 89 [media del ángulo ABD]		
24	Inv	Tú crees que si se cumple una propiedad… ¿cuál es?		
25	Paul	Em.		
26	Caro	Que los ángulos opuestos … del cuadrilátero sean congruentes		
27	Inv	Si esos son congruentes, entonces… [Caro y Paul asienten con la cabeza] se cumple la propiedad… y van a verificarlo.		
28	Gru	Sí.		
29	Paul	Mmm. Pero no creo ya [manipulando el punto B].		
30	Caro	Mueve este [refiriéndose al punto C] que es como más ancho [refiriéndose a la medida, que es mayor a la del ángulo ABC]…		

31	Paul	84… [Medida del ángulo ABC. Paul arrastra el punto C mientras la medida del ángulo ACD es muy cercana a 84, cuando logra esto, el ángulo determinado por las bisectrices es aproximado a 106]. Mmm no [arrastra ahora el punto A sin alguna intención declarada]. ¿Y si intentamos a partir de cuadriláteros?	P	06:32

Una vez determinan las medidas de los ángulos, Paul le pide a Caro que arrastren los puntos [16] y es con base en este ejercicio [Exploración] que establecen un primer resultado apoyados en lo que la pantalla de Geogebra les muestra, no cualquier cuadrilátero satisface esta condición [17]. El resultado observado hace que Paul considere que una propiedad del cuadrilátero que hace que la perpendicularidad de las bisectrices se cumpla es que un par de ángulos opuestos del cuadrilátero sea congruente [18-20, 22]. Apoyados en las medidas de los ángulos, arrastran los puntos B y C hasta que sus medidas son aproximadamente iguales [23], pero la representación gráfica expuesta en pantalla muestra que el ángulo determinado por las bisectrices no es recto, resultado que lleva a Paul a descartar esta posibilidad [31]. Al final, con base en la experiencia que han tenido hasta el momento, Paul propone [Planeación] que se realice una exploración en cuadriláteros conocidos por ellos [31].

32	Caro	Pues yo, ¿sabes que creería? Pues mira, lo que pasa es que si ves acá, se forma un triángulo [refiriéndose al triángulo cuyos vértices son A, C y la intersección de las bisectrices], ¿cierto?		
33	Paul	Ujum		
34	Caro	Entonces, ehh, pues por… [Recuerda] el teorema 180, eh, pues esta es la bisectriz, entonces pues, acá tendría que haber…		
35	Inv	¿Acá dónde? Nómbralos por favor.		
36	Caro	Pues digamos… [Selecciona cada ángulo y los arrastra] el ángulo A y el ángulo C tendrían que ser congruentes [refiriéndose a los ángulos determinados por la bisectriz] para que se cumpliera, para que digamos, el ángulo que determina la bisectriz del ángulo A y el ángulo C fueran congruentes y este sería de 90 [refiriéndose al ángulo determinado por las bisectrices].	A	06:35
37	Paul	No creo. No, porque si estos ángulos son diferentes, ¿sí? [Refiriéndose a los ángulos determinados por las bisectrices] o sea, como son bisectrices, los que tienen que ser congruentes son estos [se refiere a los ángulos determinados por la bisectriz tanto en el ángulo A como el ángulo C], digamos, estos dos tienen que cumplir la propiedad que sumen 180, 90 digo [se refiere a los dos ángulos determinados por las bisectrices que son internos en el triángulo].		
38	Caro	90. Entonces, estos dos tendrían que ser rectos [refiriéndose a los ángulos A y C].		
39	Paul	No… Ah bueno, no necesariamente porque qué tal este, digamos, mida…		
40	Caro	Miremos a ver qué pasa cuando son rectos [Paul arrastra los puntos B y D intentando que los ángulos A y C sean rectos. En la representación gráfica se tiene un cuadrilátero similar a un rectángulo]. ¿Cómo hacemos para que quede recto, recto?	P I	07:30 07:33

41	Paul	¡O sea que en el rectángulo se cumple!		

Caro no considera la propuesta de Paul y, apoyada en la representación gráfica en pantalla, inicia un análisis de la situación explorada [Análisis] que la lleva a involucrar algunos elementos teóricos conocidos con el fin de justificar que los ángulos A y C deben ser rectos [38]. Esta propuesta no es totalmente compartida por Paul [37], ante lo cual Caro propone [Planeación] que se evalúe esta posibilidad modificando el cuadrilátero de tal forma que dicha propiedad se satisfaga [40]. Paul inicia a arrastrar el punto B [Implementación] pero los valores numéricos de las medidas de los ángulos mostrados en pantalla no dan exactamente 90 (la representación de estos valores tiene dos cifras decimales). Aun así, la aproximación de las medidas permite ver que el ángulo determinado por las bisectrices tiene una medida muy cercana a 90. Este trabajo lleva a Paul a anticipar que en el rectángulo las bisectrices de los ángulos adyacentes deberían ser perpendiculares.

42	Inv	¿Qué van a mirar entonces ahora?		
43	Paul	Como ahora, a partir de los tipos de cuadriláteros, en cuáles se cumplen.	P	07:53
44	Inv	¿Van a mirar un cuadrilátero especial?		
45	Caro	Sí, que es el rectángulo [arrastra los puntos B y D para que los cuatro ángulos sean rectos].		
46	Paul	Y sí se cumple [observando la imagen del cuadrilátero].	I	08:00
47	Caro	Sí se cumple [arrastrando aun los vértices para una mayor precisión]. Pero el problema es la exactitud de Geogebra.		
48	Paul	Pues hagamos el…	V	08:12
49	Caro	Pues, es que acá, digamos el ángulo A y el ángulo C [con el mouse los señalan] pues tienen [medidas] digamos 90.14 y 90.06 respectivamente y pues este es de 89.9 [ángulo determinado por las bisectrices], entonces significa que si efectivamente, estos dos [ángulos] son rectos, entonces sí se cumple [que el ángulo determinado por las bisectrices sea recto].		
50	Paul	Entonces ya se cumple en cuadrado.		
51	Caro	En cuadrado.	S	08:15
52	Paul	Y en rectángulo [Ambas asienten con la cabeza manifestando acuerdo].		
53	Inv	¿Por qué el cuadrado?		
54	Paul	Em, porque el cuadrado también cumple la propiedad de… que tiene cuatro ángulos rectos, entonces ya…		
55	Caro	Porque el cuadrado es un rectángulo.		

La sospecha de Paul lleva a que el grupo analice lo que ocurre en cuadriláteros particulares [43] y establezca un objetivo de trabajo [Planeación]. De acuerdo a Caro [45], se transformará el cuadrilátero en pantalla con el fin de que este sea en un rectángulo. Al arrastrar los vértices del cuadrilátero [Implementación] para lograr esto, las aproximaciones de los ángulos les permite observar que el ángulo determinado por las bisectrices es recto [46,47], aun cuando el valor no es exactamente 90 [47]. Paul sugiere [48] realizar una construcción robusta del cuadrilátero para verificar este resultado [Verificación], pero Caro interrumpe su idea y asegura, basada en la evidencia empírica suministrada en pantalla, a modo de conclusión, que contar con que las medidas de los ángulos A y C sea igual a 90, conlleva a que el ángulo determinado por sus bisectrices sea también de 90 [49]. Al final, ambos estudiantes, apoyados en este resultado, mencionan [Síntesis] que la propiedad solicitada en el problema se cumple cuando el cuadrilátero es cuadrado [50] o rectángulo [52], explicando que el cumplimiento de la propiedad en el cuadrado se da en cuanto este es un rectángulo a su vez [54, 55].

56	Paul	Y ya se cumple… y listo… entonces ahora hagámoslo con un paralelogramo.		
57	Caro	Un paralelogramo.		
58	Paul	Hagámoslo acá [desplazan la pantalla de Geogebra, para tener un lugar donde construir el paralelogramo].	P	08:53
59	Caro	¿Por qué no trabajas sobre esa misma? [Mientras Paul construye una recta]		
60	Paul	Es que me confundo [construye una recta paralela a la ya construida, la recta determinada por un punto en la recta inicial y otro en la recta paralela y finalmente la recta paralela a esa última recta por el segundo punto de la recta inicial. Ahora determina la intersección entre las dos rectas construidas como paralelas].		
61	Caro	Los ángulos.		
62	Inv	¿Entonces estás construyendo un paralelogramo?		
63	Paul	Sí, em.		
64	Caro	Las bisectrices… [construye las bisectrices de dos ángulos adyacentes del paralelogramo]	I	09:05
65	Paul	Creo que también… se va a cumplir [observando la pantalla. Paul procede a medir el ángulo determinado por las bisectrices].		
66	Caro	Pero tienes que hacer el punto de intersección o sino no toma el ángulo.		
67	Paul	Ahora, tomamos la medida del ángulo de las bisectrices [toma la medida del ángulo mencionado y esta da 90]…Sí, también se cumple.		
68	Caro	En un paralelogramo.		
69	Paul	O sea, ya se cumple en… cualquier paralelogramo [Caro asiente con la cabeza].	S	10:37
70	Caro	Sí, por eso es que, pues el rectángulo y el cuadrado son paralelogramos.		
71	Paul	[Arrastra un vértice del paralelogramo, observando la medida del ángulo determinado por las bisectrices en distintas posiciones] Sí.	V	10:47

72	Caro	Cualquier paralelogramo se cumple.		

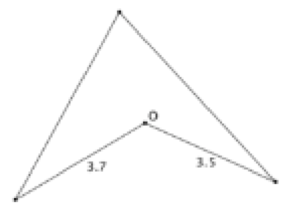
El plan que Paul y Caro habían trazado involucraba evaluar el cumplimiento de la propiedad mencionada en el enunciado del problema en cuadriláteros conocidos por ellos [31]. Una vez finalizado el trabajo con el rectángulo y cuadrado, Paul sugiere [56] tomar en consideración un paralelogramo [Planeación], para lo cual realiza una construcción del mismo, apoyado en rectas paralelas [Implementación], así como las bisectrices de dos ángulos adyacentes de este cuadrilátero [64]. Paul anticipa en este punto que la propiedad parece cumplirse en el paralelogramo [65] y al determinar la medida del ángulo determinado por las bisectrices, esta da exactamente 90 [67], resultado que lleva a Paul a señalar que en cualquier paralelogramo [Síntesis] esta propiedad es verdadera [69]. Apoyándose en este resultado, Caro señala que es por ello que en el rectángulo y cuadrado esta propiedad de cumple, por ser estos cuadriláteros miembros de la familia de los paralelogramos [70]. Finalmente, Paul arrastra [71] uno de los vértices del paralelogramo en la pantalla [Verificación], con lo que observan que bajo arrastre esta propiedad se conserva y que en cualquier paralelogramo se satisface [72].

73	Paul	Entonces, ¿ahora qué? ¿Trapecio? [Caro asiente con la cabeza] Lo eliminamos o trabajamos acá [refiriéndose a si se utilizaba la primera construcción hecha o se iniciaba desde cero]. ¿Cuál eliminamos? ¿Este o este? [Elimina parte de la primera construcción]		
74	Caro	¿Por qué no lo construyes abajo?	P	10:52
75	Paul	Sí [desplaza la pantalla nuevamente para tener espacio libre].		
76	Caro	Pero, ¿vas a hacer un trapecio isósceles? o… un trapecio.		
77	Paul	Un trapecio… ¿cómo es que es? Son… dos lados parale…		
78	Caro	Dos lados paralelos [Paul construye una recta y una paralela a esta].		
79	Paul	Y ahora los segmentos… um, pero ¿cómo hacemos?		
80	Caro	No, pues traza acá [segmento determinado por un punto en la recta original y otro en la paralela] y trazas otro punto [en la recta paralela. Paul traza el primer segmento]… Y acá trazas otro punto [Paul construye un segundo punto en la recta paralela y el segmento determinado por este y el segundo punto de la recta original]. Listo. Eso es un trapecio. Em, bisectriz [Paul selecciona la herramienta bisectriz y construye las bisectrices de dos ángulos adyacentes que comparten un lado paralelo].	I	11:50
81	Paul	Mueve este punto [uno de los vértices].		
82	Caro	Espérame [construye el punto de intersección entre las bisectrices], bueno.		
83	Paul	Tomemos la medida primero [determina la medida del ángulo determinado por las bisectrices y esta da 92.08].		

84	Gru	No [Paul arrastra uno de los vértices sobre la paralela].		
85	Caro	No [gesto con la cabeza de rechazo].		
86	Paul	No siempre se cumple [Caro rechaza con la cabeza]. ¿Y si es isósceles? [Arrastra un vértice para que el cuadrilátero sea trapecio isósceles]. Hallar las medidas de este segmento y este segmento [determina las medidas de los lados no paralelos].	P	13:16
87	Caro	5.9.	I	13:20
88	Paul	Y 6.02 [arrastra un punto con el fin de que los segmentos no paralelos sean congruentes]… No [los lados no paralelos son congruentes pero el ángulo determinado por las bisectrices no es recto].		
89	Caro	No, No se cumple.	S	13:36

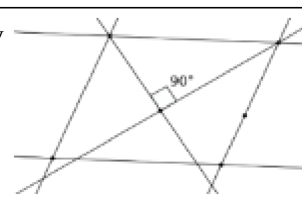
Una vez han verificado que en el paralelogramo se cumple la propiedad, Paul propone [Planeación] construir un trapecio [73]. Sin embargo, para Caro no es claro si construirá un trapecio ordinario o uno isósceles [76], a lo que Paul responde que será un trapecio sin alguna otra propiedad [77]. Caro construye dos rectas paralelas [Implementación] y dos segmentos de forma tal que en pantalla se puede observar un trapecio. Después de ello, Paul construye las bisectrices de los ángulos que comparten uno de los lados paralelos [80] y al determinar la medida del ángulo determinado por estos rayos, se dan cuenta que esta no da 90 [83], resultado que los lleva establecer que en el trapecio ordinario la propiedad no se cumple [84, 85] y a analizar si en el trapecio isósceles [86] sí se cumple tal propiedad [Planeación], para lo cual arrastran los extremos de los segmentos de los lados no paralelos [Implementación], de tal forma que sus longitudes sean iguales [88]. El resultado en pantalla les muestra que una vez los lados no paralelos son congruentes, el ángulo determinado por las bisectrices construidas no es recto. Con base en esto, Paul y Caro descartan este cuadrilátero [89] como uno donde la propiedad declarada en el problema se pudiera satisfacer [Síntesis].

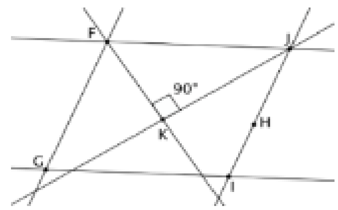
90	Paul	Listo… ¿Y en una cometa? No creo…	P	13:43
91	Caro	Um no. ¿La cometa qué? Dos lados…		
92	Paul	¿Son los opuestos congruentes? [Caro rechaza con la cabeza]		
93	Caro	No, los consecutivos congruentes.		
94	Paul	Sí [borra el trapecio]. ¿Intentamos primero en el rombo?		
95	Caro	No porque el rombo es un paralelogramo.		
96	Paul	Sí, pues sí. Nos falta la cometa [construye un segmento]. Um, ¿cómo es que era eso? ¿Cuál es el que daba lado dada su amplitud? Creo que es este [selecciona la herramienta Segmento dada su longitud]. Ah pues miremos su longitud [del segmento construido con ayuda del panel de vista algebraica]	I	14:07
97	Caro	¿Creo que los ángulos tienen que ser congruentes? ¿Los opuestos? Para la		

		cometa, [Paul navega entre las herramientas de Geogebra] ¿Qué vas a hacer?		
98	Paul	El segmento dada su longitud para que sean… congruentes, los segmentos.		
99	Caro	Con una circunferencia hazlo.		
100	Paul	Ah, bueno sí [construye una circunferencia donde el segmento construido es radio].		
101	Caro	Y trazas cualquier radio [Paul dibuja un punto sobre la circunferencia, el segmento determinado por este y el centro de la misma].		
102	Paul	Y ahora, son otros dos. Ah pues hacemos esto de nuevo [traza otro segmento que comparte un extremo con uno de los segmentos construidos] y hacemos lo mismo, una circunferencia [selecciona la herramienta circunferencia] um, ¿sí? Porque tiene que tener al otro… [contener los dos extremos de los segmentos que son radios de la circunferencia]		
103	Caro	Exacto…		
104	Paul	Pues al tanteo [determina el segmento que configura el cuadrilátero, la longitud de este y el anteriormente construido]. Listo [Arrastra por un periodo breve la intersección de estos dos segmentos]. Ah bueno, hagamos primero las bisectrices [determina la bisectriz de un ángulo] y la otra sería la de este… 		
105	Caro	La de este [ángulo opuesto al que ya se le construyó la bisectriz], ah no, es consecutivo, la de este, cualquiera de los dos te sirve [refiriéndose a los dos posibles ángulos adyacentes. Paul construye la segunda bisectriz].		
106	Paul	No [refiriéndose al no cumplimiento de lo solicitado en el problema].		
107	Caro	Pues no sé, muévelo…		
108	Paul	Espera un momento.		
109	Caro	Y el punto de intersección [construye el punto de intersección de las bisectrices y determina la medida del ángulo determinado por las bisectrices]. Listo, ahora mueve a O para que sea congruente… los segmentos [determinados por el punto O].		
110	Paul	[Arrastra al punto O hasta que los segmentos determinados por el son congruentes dadas sus longitudes] mmm no.		
111	Caro	No se cumple. Creo que solo se cumple en…		
112	Gru	Los paralelogramos.		
113	Paul	Sí, se cumple solo en los paralelogramos, porque ya en los trapecios y trapezoides… no se cumple.	S	17:08
114	Caro	Ujum		
115	Paul	¿Cuál más se nos escapa?		
116	Caro	No, yo creo que ahí están… [observan al investigador indicando que terminaron]	V	17:19

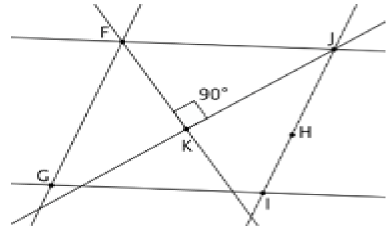
Apoyados en la estrategia de involucrar cuadriláteros familiares, Paul sugiere [90] ahora ensayar con una cometa [Planeación]. Al inicio dudan sobre las condiciones de este cuadrilátero, pero logran recordar que en esta se debe cumplir la congruencia de los lados consecutivos [91-93]. Antes de representar gráficamente este cuadrilátero, Paul propone construir primero un rombo y evaluar el cumplimiento de la propiedad allí [94], idea rechazada por Caro en cuanto este cuadrilátero es un paralelogramo [95]. Retomando la construcción de la cometa [Implementación], ambos estudiantes tienen problemas para poder representar este cuadrilátero al no saber o tener claridad sobre cómo involucrar las herramientas de Geogebra para tal fin. Su estado de incertidumbre las lleva a construir un cuadrilátero en el que apenas dos lados adyacentes son congruentes y los otros no lo son con certeza (sus longitudes son apenas cercanas).

Una vez tienen este cuadrilátero [104], construyen sus bisectrices y sin determinar la medida del ángulo que estos dos rayos conforman, anticipan el no cumplimiento de la propiedad que el problema involucra [106], pues una observación de este ángulo en pantalla lleva a concluir que las bisectrices no son perpendiculares. Caro propone determinar la medida del ángulo, arrastrar uno de los vértices de tal forma que los lados no congruentes lo sean y corroborar si su apreciación es acertada [107-109]. Cuando Paul hace esto, el resultado en pantalla no permite asegurar que el ángulo determinado por las bisectrices sea recto, lo que lleva a Caro y Paul a concluir [111, 112] que en este cuadrilátero tampoco se cumple la propiedad estudiada y que esta solo tiene presencia en los paralelogramos [Síntesis]. En este punto retoman las experiencias del trabajo con los otros cuadriláteros [113], aquellas afortunadas y otras donde no se logró evidenciar el cumplimiento de la propiedad. Paul le pregunta a Caro si algún cuadrilátero falta por ser evaluado [Verificación], a lo que ella responde que ya se han evaluado los cuadriláteros conocidos [116] y que el problema ha sido resuelto.

117	Inv	Vuelvan a la tarea [abren el archivo de texto y leen].	L	17:24
118	Caro	Formule conjeturas y justifíquelas.		
[Regresan al archivo de Geogebra y ubican la construcción del paralelogramo]			A	17:40
120	Paul	En el paralelogramo se cumple la propiedad de, que, pues, los opuestos son congruentes.		

121	Caro	Ujum.
122	Inv	¿Qué opuestos? ¿A qué te refieres con los opuestos?
123	Caro	Los lados opuestos son congruentes.
124	Paul	Los ángulos opuestos, o sea…
125	Caro	Ah, los ángulos opuestos son congruentes.
126	Paul	Y estos dos determinan 180.
127	inv	¿Quiénes son estos dos?
128	Paul	Em.
129	Inv	Ponle nombre por favor [Paul nombra los puntos]. 
130	Paul	Entonces sabemos que el ángulo…
131	Caro	F.
132	Paul	Son congruentes…y que el ángulo FGI, bueno, la medida, con él, con la medida del ángulo GIJ suma 180, por un teorema.
133	Caro	Sí.
134	Paul	Entonces…son congruentes, no. Son 180.
135	Caro	O sea, GFJ e IJF son complementarios, por un teorema, del paralelogramo.
136	Inv	¿Qué es lo que dice ese teorema?
137	Caro	El teorema dice…
138	Paul	Que los ángulos adyacentes son suplementarios.
139	Caro	En un paralelogramo… pues digamos, al ser estos complementarios, entonces pues, eh, los ángulos, digamos, los ángulos que forman las bisectrices también tendrían que ser complementarios, o sea el ángulo JFK…

La persona que acompañaba a los estudiantes les indica que revisen el enunciado del problema con el objetivo de que no dejen de lado algún requerimiento [117] puesto que ellos consideraban que no había algo más por hacer. Los estudiantes realizan esto [Lectura], identificando que en este se solicita formular conjeturas y justificarlas [118]. Luego de esto retoman a la construcción del paralelogramo en Geogebra e inician a mencionar algunos hechos geométricos que en este tipo de cuadrilátero se satisfacen [Análisis] como lo son la congruencia de los lados y los ángulos opuestos y que las medidas de los ángulos adyacentes suman 180. En este punto no logran reconocer una ruta que les permita proveer una justificación a lo que han encontrado.

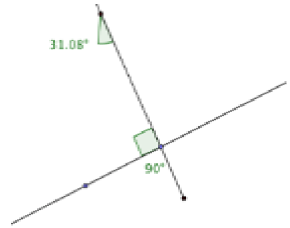
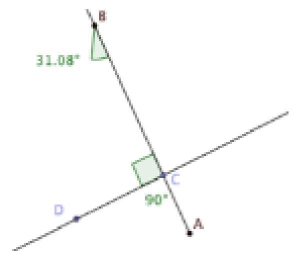
140	Paul	¡Ay! ¡Ya sé cómo sale! Mira. Como estos, como el ángulo GFJ y el ángulo FJI suman 180 y como las, eh, bisectrices pues es la mitad del ángulo, entonces si los dos suman 180, pues la mitad de ellos van a sumar 90, entonces como ya aquí se forma un triángulo [FJK], pues ya se cumple. Como estos son de 90 [ángulos determinados por las bisectrices], pues tiene que cumplirse que este es de 90, y ya. 	A	
141	Caro	Ujum		
142	Paul	La justificación…		
143	Caro	Otra vez.		
144	Paul	¿Sí?		
145	Caro	Sí, sí, sí, ya te entendí la idea. O sea, pues en teoría, lo que yo te decía, GFJ y FJI son complementarios, o sea la suma de sus medidas son 180, pues digamos, las bisectrices determinarían la mitad de cada uno de esos ángulos significa que entonces que el ángulo JFK y el ángulo FJK son eh… son complementarios, los otros eran suplementarios. Y pues al ser complementarios entonces la suma de sus medidas es de 90 y pues como acá se forma en triángulo FJK entonces, y por el teorema 180, al ser estos dos ángulos complementarios, la suma mide 90, entonces el ángulo restante debe medir 90, para que se cumple ese teorema.	V	20:34
146	Paul	Sí.		
147	Gru	Y ya.		
148	Paul	¿Dónde está la tarea?		
149	Caro	Acá [abren el archivo donde está el problema].		
150	Paul	Entonces la conjetura sería que el cuadrilátero en que se cumple la propiedad es un paralelogramo.		21:39
151	Caro	Sí.		
152	Paul	O sea, sería, En un paralelogramo las bisectrices de los ángulos adyacentes determinan un ángulo recto.	S	
153	Caro	Ujum.		
154	Paul	Y ya.		21:57

La intervención de Paul [140] es repentina y finaliza el estado de indagación en el que ellos se encontraban inmersos. Paul parte del hecho de que la suma de las medidas de los ángulos GFJ y FJI es 180, asunto que se había explicitado ya en anteriores intervenciones. Luego involucra las bisectrices de estos ángulos para asegurar que, si las medidas de los ángulos al ser sumadas dan 180, entonces las medidas de los ángulos KFJ y KJF al ser sumadas tienen que dar 90. Haciendo uso del triángulo FJK, que en pantalla se ha determinado, junto a lo que se acaba de establecer y un hecho geométrico que señala que en el triángulo la suma de las medidas de sus ángulos da 180, Paul asegura que no hay otra opción para el ángulo FKJ distinta a ser recto. Posterior a ello, pareciera que Caro no tiene claridad sobre esta justificación [143], sin embargo, ella retoma las ideas de Paul y repite los pasos claves de la justificación propuesta por él [Verificación]. Paul regresa al enunciado del problema [148, 149] y lo observa, mencionando que la conjetura del trabajo realizado [Síntesis] es que en los cuadriláteros que son paralelogramos la propiedad involucrada se cumple [150, 152]. Con esto se finaliza el trabajo realizado por este grupo.

El trabajo de Ana y Juan

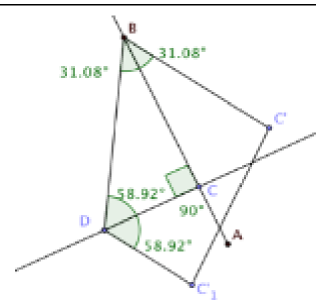
Cuando el grupo de Juan y Ana inicia a resolver el problema tiene presencia una lectura del enunciado del mismo [Lectura] por parte de Juan. Una vez finaliza la lectura procede a leer nuevamente el enunciado haciendo pausas en la lectura y permaneciendo en silencio en algunos momentos.

N	Est	Intervención	Ep	T
1	Juan	[Lee el enunciado] Entonces… bisectrices de dos ángulos adyacentes	L	00:44
2	Inv	¿Qué piensan?		
3	Ana	Mmm, yo primero haría como el ángulo recto y arrastraría… esa opción de arrastre.	P	01:21
4	Inv	¿Qué piensa Juan?		
5	Juan	Sí, yo veo que lo más sencillo seria trabajar con el ángulo recto primero, construyéndolo primero, el ángulo recto y luego construyendo las bisectrices. Bueno, ensayar por ahí.		
6	Ana	¿Vas tú?		
7	Juan	Dale [Ana abre Geogebra y construye un rayo]. Pues construimos los rayos perpendiculares, dos rectas perpendiculares [construye una recta perpendicular al rayo, pero no por su origen].	I	02:06
8	Ana	Ujum. Marcamos de una vez el ángulo [determina la medida de ángulo]. Listo.		
9	Juan	Bueno, si hacemos el…, empezamos a construir el ángulo de tal manera que…		
10	Ana	Ajá, que sea congruente.		

11	Juan	Sí [Ana determina la medida de otro ángulo determinado por los puntos en pantalla].	
12	Inv	¿Por qué hacen eso?	
13	Ana	Como es la bisectriz, primero hacer un ángulo, y luego otro que tenga la misma medida [nombra los puntos]. Como es la bisectriz, calculamos el ángulo DBC y hacer uno igual, que sea congruente, un ángulo CB y un punto que esté en la recta [DC]. [Selecciona la herramienta ángulo dada su amplitud y construye el ángulo CBC’ cuya medida es la misma que DBC] Listo, entonces ya tenemos una bisectriz [señala con el mouse el rayo AB], que sean los dos ángulos congruentes. Entonces tracemos esta [construye el rayo BC’].	
14	Juan	Listo, ahora sería hacer…	
15	Ana	Esta [señala el punto D, refiriéndose a la segunda bisectriz]	
16	Juan	Ajá. Esa bisectriz.	
17	Ana	Espera [construye el rayo BD].	
18	Inv	¿Cómo Juan? ¿Ahora qué?	
19	Juan	Ahora vamos a hacer la bisectriz del punto D haciendo el mismo proceso del punto B [Ana mide el ángulo BDC y el ángulo CDC1’, cuya medida es igual a la del ángulo BDC].	

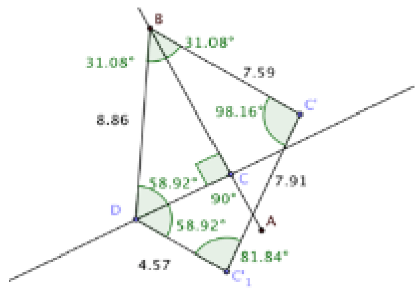
Al leer el enunciado del problema no hay una idea clara sobre cómo proceder. Es Ana quien propone [Planeación] construir primero el ángulo recto y realizar un arrastre (no es clara su intención con el arrastre) [3], esta idea es aceptada por Juan, quien menciona [5] (posiblemente desarrollando la idea de Ana) que sería más sencillo involucrar el ángulo recto desde el inicio y a partir de esto obtener el cuadrilátero. Ana abre Geogebra y construye [Implementación] un rayo y una recta perpendicular a este [7], posteriormente ubica un punto llamado D sobre la recta [13] y procede a determinar un segundo punto que haga que el rayo BC se convierta en bisectriz del ángulo con vértice en B. Ese mismo proceso lo realizan con el ángulo con vértice en D [19].

20	Ana	Listo. ¿Y ahora?	
21	Juan	Toca…	I
22	Ana	Trazo la semirrecta [rayo DC1’] y acá [rayo AB] poner una recta…	

23	Juan	No es necesario porque aquí ya se puede construir el cuadrilátero. Ya las bisectrices se intersecan, ya forman ángulo recto.
24	Inv	¿Cómo?
25	Juan	Ya, ahí, podemos trazar el cuadrilátero.
26	Inv	¿Qué cuadrilátero?
27	Juan	El cuadrilátero, bueno en este caso [Ana rechaza la idea con la cabeza]
28	Ana	No porque toca marcar esta intersección [entre la recta BA y la recta C1’].
29	Juan	No es necesario porque ya están formados los ángulos, los ángulos que necesitamos. O sea, que sean, que a parte de esos haya bisectrices y que estas formen un ángulo recto y que los ángulos sean adyacentes.
30	Inv	¿Qué cuadrilátero podríamos formar?
31	Juan	El C’C1’, este es D y B [C’C1’DB].
32	Ana	Ya miramos [construye el polígono determinado por esos puntos con la herramienta Polígono]. Este, ¿cierto? 
33	Juan	Y ya están las condiciones [Ana oculta algunos objetos geométricos auxiliares que había utilizado]. Deja marcadas las bisectrices.
34	Ana	Listo.

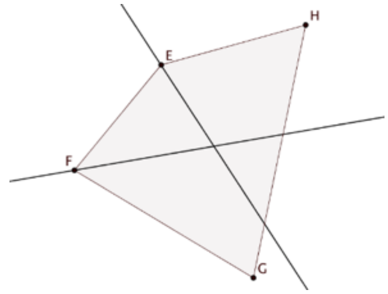
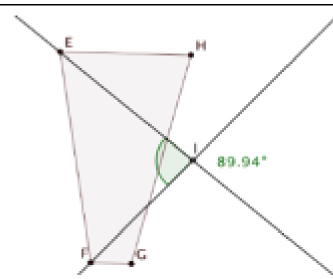
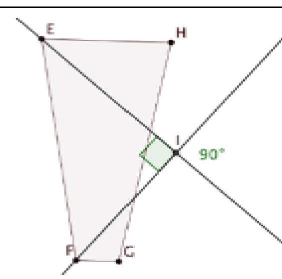
Al finalizar el procedimiento que propusieron, Ana propone realizar otra construcción [22]; sin embargo, Juan rechaza esta idea y sugiere construir el cuadrilátero utilizando los puntos D, B, C’ y C1’ [31] dado que las bisectrices de los ángulos B y D ya se intersecan y determinan ángulo recto [29], aunque esta idea no es compartida plenamente por Ana [27, 28]. Para Ana es necesario determinar la intersección de la recta AB y la recta DC1’ pero juan no da desarrollo a esta idea e insiste en su propuesta. Ana construye el cuadrilátero BDC1’C’ [32] y oculta algunos objetos geométricos en pantalla, dejando únicamente el cuadrilátero y sus bisectrices [33].

35	Juan	Listo. ¿Me dejas ver otra vez el problema? [Abren el archivo con el problema y lee] bisectrices de dos ángulos adyacentes… del cuadrilátero determinan un ángulo recto [regresan a Geogebra]. Formule conjeturas, o sea que pueden haber más…	L C	08:19 08:35
36	Ana	Podemos calcular estos ángulos… para mirar qué pasa… o los lados, si hay una regularidad o algo.	P	08:39
37	Juan	Sí.		

38	Ana	¿Sí? [determina las longitudes de los lados del cuadrilátero]		
39	Inv	¿Qué tratas hacer Ana?		
40	Ana	Mirar si hay una regularidad, digamos si hay lados congruentes o ángulos congruentes. Midamos los ángulos [determina las medidas de los ángulos en el cuadrilátero].		
41	Juan	Yo creo que no [Ana rechaza también la idea con la cabeza].		
42	Ana	Yo tampoco.		
43	Juan	Porque los lados son diferentes… [Ana asiente con la cabeza]	I	08:58
44	Ana	Um… 		
45	Inv	¿Qué piensan?		

Cuando Ana ha construido en pantalla el cuadrilátero que su compañero mencionó, Juan retoma el enunciado del problema [Lectura] y lee algunos apartados del mismo, particularmente enfatiza en la solicitud del problema de formular conjeturas y justificarlas dando significado a lo que allí se presenta [Comprensión], aun así, no propone alguna estrategia para resolver el problema. Ana plantea calcular las medidas de los ángulos y lados del cuadrilátero construido y con ello observar alguna relación que le permita determinar un tipo particular de cuadrilátero [Planeación], propuesta que es aceptada por Juan. Ana realiza esto [Implementación] pero los valores obtenidos no permiten evidenciar alguna congruencia entre los lados o ángulos del cuadrilátero, ambos estudiantes observan la pantalla sin pronunciar palabra alguna.

46	Juan	Entonces yo creo que deberíamos hacer ahora un cuadrilátero y trazar las bisectrices, normal, y a ver qué pasa [Ana asiente con la cabeza]. Si son perpendiculares, entonces… podría pensarse que las bisectrices de dos ángulos adyacentes siempre van a ser perpendiculares. Se podría pensar en una conjetura así [Ana construye un cuadrilátero cualquiera].	P	10:18
47	Ana	Tiene la opción de bisectriz, ¿cierto? [mientras navega entre las herramientas de Geogebra]	I	10:30
48	Juan	Creo que esta…		
49	Ana	Ah sí… [construye las bisectrices de dos ángulos adyacentes]		

50	Juan	[Observando la construcción] No, ahí no se puede [Ana rechaza también la idea con la cabeza]. 		
51	Ana	Empecemos a arrastrarlo… hasta que sea… [dibuja la intersección de las bisectrices y la llama I]	P	11:16
52	Inv	¿Cómo Ana?		
53	Ana	Empezar a arrastrar este [señala el punto E] con el mouse. Sí, espera calculamos este ángulo [determina la medida del ángulo EIF]. Listo. Empezar a arrastrarlo… empezar hasta que sea… [Arrastra el punto E]… ¿seguimos arrastrando? [aun no llega a una medida de 90] No pero ahí ya… [arrastra al punto F y la medida del ángulo es cercana a 90]		
54	Juan	Si se mueve este punto, el punto I… intenta mover el punto I… ¿qué pasa?		
55	Ana	No, creo que ese no se puede mover…		
56	Juan	Se cambian las bisectrices, ya no sería bisectriz.		
57	Ana	Porque es la intersección. Ese punto no se puede mover.		
58	Juan	Pero sobre la otra recta sí, ¿no?		
59	Ana	¿Cuál? Dale…		
60	Juan	Este punto sobre la recta… [intenta mover al punto I pero no puede] Ah pero ya no sería…		
61	Ana	Este no se puede mover.	E	11:43
62	Juan	Entonces, el único que se puede mover es el cuadrilátero [sus vértices]… [Ana arrastra los puntos E y F y se acerca al ángulo de 90] Ahí se está acercando. Ahí ya, te pasaste… [Ana mueve el punto G para aproximarse al valor de 90] 		
63	Ana	Estas van a ser congruentes [refiriéndose a los segmentos EF y HG]… ay, casi… [arrastra en punto G con el fin de llegar al valor exacto de 90 y lo logra] Listo. [Determina las longitudes de los segmentos EF y GH] 		
64	Inv	¿Y eso para qué?		

65	Ana	Para ver si… una regularidad.
66	Inv	¿Qué piensa Juan?
67	Juan	No, pues, ya descartamos que tiene que ser segmentos congruentes o ángulos congruentes. Aun así, podemos construir las bisectrices perpendiculares.

Juan, tras un momento de silencio, propone [Planeación] construir un cuadrilátero y sus bisectrices con el ánimo de descubrir alguna relación [46]. Ana inicia construyendo el cuadrilátero EHGF [Implementación] sin propiedad alguna y las bisectrices de los ángulos E y F [49]. Posteriormente, Ana propone [Planeación] arrastrar los vértices, particularmente el punto E [53], hasta que el ángulo EIF sea recto, para ello determina la medida del ángulo EIF, siendo I la intersección de estos rayos [51]. Ana inicia a arrastrar los vértices del cuadrilátero, de acuerdo a lo propuesto, buscando alguna relación [Exploración] y tras la manipulación de los vértices por algún tiempo, logra que la medida del ángulo EIF sea muy cercana a 90 [53]. En este punto la configuración en pantalla la lleva a considerar la posibilidad de que los segmentos EF y GH sean congruentes. Al continuar arrastrando los vértices logra que la medida del ángulo EIF sea 90 y después de esto procede a determinar las longitudes de los segmentos que considera pueden ser congruentes, obteniendo que estos valores son muy cercanos [63]. Juan menciona, basado en la experiencia que han tenido hasta ese momento, que no es necesario contar con segmentos o ángulos congruentes para que las bisectrices de los ángulos adyacentes sean perpendiculares [67].

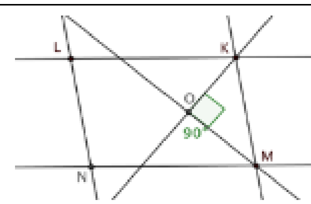
68	Ana	Um [le señala con el mouse a Juan que los segmentos EF y HG son congruentes]. Tal vez si estas son paralelas, puede ser un trapecio isósceles [apoyada en los lados congruentes].	
69	Juan	Sí, mira si estas son paralelas.	
70	Ana	¿Miramos?	
71	Juan	Sí [Ana usa la herramienta Relación en los lados aparentemente paralelos pero el resultado arrojado es que no son congruentes. Al seleccionar los segmentos se equivoca y accidentalmente selecciona otro distinto]. No, estas… [refiriéndose a los lados del cuadrilátero que se construyó al principio]	
72	Ana	¿Cuáles?	E
73	Juan	Pues, ¿estas no son paralelas? [segmentos EH y FG]	
74	Ana	[Vuelve a utilizar la herramienta en los segmentos y esta vez si los selecciona correctamente, son paralelos según la herramienta] Sí [asiente con la cabeza].	
75	Juan	Listo, y ahora estos [refiriéndose a los lados del primer cuadrilátero].	
76	Ana	Estas dos [segmento BC’ y DC1’]… [utiliza la herramienta en estos segmentos y el resultado es que sí son paralelas]	
77	Juan	También son paralelas.	

78	Ana	En trapecio isósceles.		
79	Juan	No, no necesariamente [señala el primer cuadrilátero que no es isósceles], desde que sea un trapecio.	S	15:22
80	Ana	Ujum.		

Ana le señala a Juan la posible congruencia de los segmentos EF y GH y le comenta que posiblemente los segmentos EH y FG son paralelos [68], lo que la lleva a concluir que el cuadrilátero posiblemente sea un trapecio isósceles. Juan le pide que verifique esta relación con las herramientas de Geogebra [69] y Ana lleva a cabo este proceso, obteniendo como respuesta que los segmentos son paralelos efectivamente [74]. Juan le solicita que evalúe esa relación entre los segmentos C'B y DC1', del primer cuadrilátero construido [75], obteniendo como respuesta que estos segmentos son paralelos también. Estos resultados llevan a Ana a proponer [78] que en el trapecio isósceles la propiedad se satisface [Síntesis], a lo que Juan responde que no se requiere que el trapecio sea isósceles, el simple hecho de que sea trapecio es suficiente (el primer cuadrilátero es un trapecio no isósceles), propiedad que es aceptada por Ana [79, 80].

81	Juan	Entonces, los ángulos adyacentes, pero… no cualquiera [pareja de ángulos]. Sí, los ángulos adyacentes, pero pareciera que no son cualquier ángulo adyacente. Porque si…, tiene que estar involucrado… [señala el ángulo B y D del primer cuadrilátero] Bueno, entonces, ahora probemos los ángulos adyacentes pero que tengan el mismo… o sea, que el lado sea… paralelo al otro, ¿me hago entender? o sea, probar con estos dos [con el mouse señala los ángulos D y C1'] a ver qué pasa. Con estas bisectrices, porque si no, parecería que fueran solo los ángulos que tienen el lado que no tiene que ser paralelo al otro.	P	16:12
82	Ana	¿Acá? [segundo cuadrilátero]		
83	Juan	No, en este [primer cuadrilátero construido. Ana construye la bisectriz del ángulo DC1'C' y oculta el rayo AB].		
84	Ana	Dices esta ¿sí? [Ángulo determinado por las bisectrices de los ángulos DC1'C' y BDC1'] entre estas dos.	I	16:45
85	Juan	Sí.		
86	Ana	[Determina la intersección de esas bisectrices, punto J, y la medida de este ángulo, la cual no da 90] 80…		
87	Juan	Listo. Entonces, eh, si los ángulos, pareciera que si los ángulos estuvieran formados por lados paralelos…, es decir, por ejemplo, si tuviéramos en este caso un paralelogramo, los ángulos adyacentes, al parecer van a ser… eh, las bisectrices de los ángulos adyacentes van a ser perpendiculares. En este caso, como tenemos un trapecio, solo vamos a tener dos lados paralelos y en estos dos lados, lados paralelos, si son lados de los dos ángulos adyacentes, las bisectrices de esos dos ángulos adyacentes van a ser perpendiculares.	A	17:37

Aun cuando se ha descubierto que en el trapecio la propiedad se satisface, Juan sospecha que esta no es verdadera para cualquier par de ángulos adyacentes. En un momento inicial [81] intenta explicar a Ana su hallazgo, pero este no es afortunado. Por tal motivo propone a su compañera [Planeación] que determine las bisectrices de los ángulos adyacentes que comparten uno de los lados paralelos (en este caso el segmento DC1') para ver si el ángulo determinado por estas es recto también [81]; para Juan, esto le permitiría identificar si la relación de perpendicularidad de las bisectrices depende de la pareja de ángulos que se consideren y si deben o no compartir uno de los lados paralelos del trapecio. Ana realiza [86] esto [Implementación] y el resultado arrojado por Geogebra (en que las bisectrices construidas corresponden a los ángulos D y C1') llevan a Juan a asegurar que en tanto los ángulos involucrados en el cuadrilátero estén determinados por lados paralelos y compartan un lado no paralelo, la propiedad solicitada en el problema se cumplirá. Sus palabras no permiten comunicar con claridad su idea y opta por usar como analogía lo que ocurriría en un paralelogramo [87].

88	Juan	Entonces podríamos probar también con un paralelogramo a ver si… si sí funciona esa conjetura [Ana desplaza la pantalla y construye un paralelogramo KLNM y la bisectriz del ángulo K].		
89	Ana	¿Y a M? [segundo ángulo]		
90	Juan	Listo, el de [ángulo] KM… la bisectriz de LKM y ahora la bisectriz del ángulo KMN [Ana construye las dos bisectrices y su intersección, punto O]. Pareciera que sí.	V	18:32
91	Ana	Ujum [determina la medida del ángulo determinado por las bisectrices]. 		
92	Juan	Sí. Entonces [enfoca la construcción del trapecio inicial] aquí funcionan los ángulos, las bisectrices de los ángulos cuyos lados opuestos son paralelos ¿sí? [Ana asiente con la cabeza] Entonces podríamos usar esto mismo acá [señala en paralelogramo], esta misma conjetura… y aquí también funcionaría por eso, porque los lados opuestos son paralelos [señala los segmentos LK y MN con el mouse].		
93	Inv	¿A qué se refiere con los lados opuestos?	S	19:58
94	Juan	Es decir, que los ángulos adyacentes tienen, los lados que conforman… uno de los lados que conforma esos ángulos… son paralelos. Obviamente tendría que ser opuesto porque no se intersecarían. Entonces, funcionaría porque los lados que conforman ese ángulo son paralelos…		
95	Ana	Son opuestos…		

96	Juan	Pero aquí no funciona [señala en primer cuadrilátero] porque los lados opuestos, serían BD y C'C1', entonces en ese caso no funciona. Listo, entonces la conjetura [abren el archivo con el problema].		
			L	22:04
97	Ana	Um.		

Juan, con el ánimo de corroborar su idea [88], le sugiere a Ana verificar esta propiedad en un paralelogramo [Verificación]. Para esto Ana construye un paralelogramo con ayuda de rectas paralelas y lo nombra KLNM. Ana también construye las bisectrices de los ángulos K y M y sin obtener la medida del ángulo determinado por estos rayos, Juan anticipa que estas son perpendiculares [90]. Ana determina la medida de este ángulo y esta da como resultado 90, lo que confirma su sospecha. Ahora Juan, observando las tres construcciones realizadas, menciona [92, 94] que en los trapecios se cumple la propiedad cuando los lados opuestos de los ángulos adyacentes son paralelos [Síntesis] y que por ese motivo también se cumple esta propiedad en el paralelogramo. Además, Juan señala que en los trapecios no se cumple cuando los lados opuestos de los ángulos son los segmentos no paralelos del trapecio [96]. Seguido a esto, ambos retoman el enunciado del problema y lo leen mentalmente [Lectura], siendo Juan quien menciona que ahora les corresponde elaborar una conjetura.

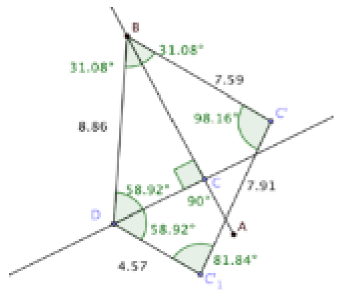
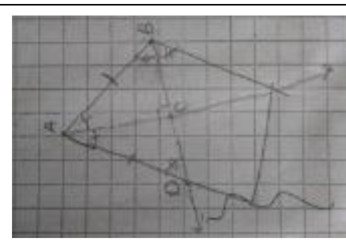
98	Juan	Entonces, no se puede decir que los lados que conforman, ¡ah no! sí se tiene que decir, los lados que conforman, bueno, un par de lados que confirman los ángulos tienen que ser paralelos.		
99	Ana	Um.		
100	Juan	Sería, eh, dado un cuadrilátero, ¿sí?		
101	Ana	Sí.		
102	Juan	Dado un cuadrilátero [escribe en una hoja].		
103	Ana	Nombrarlo.		
104	Juan	Dado un cuadrilátero ABCD, eh.	S	22:30
105	Ana	Nombrar las paralelas.		
106	Juan	Sí, entonces para que sean opuestos, entonces [escribe] si el segmento AB paralelo al segmento DC, ¿sí? no necesitamos más condiciones, ¿no?		
107	Ana	No.		
108	Juan	Entonces el ángulo BAD, entonces…		
109	Ana	Y la bisectriz de… toca llamar…		
110	Juan	[Escribe] La bisectriz del ángulo BAD es perpendicular a la bisectriz del ángulo CDA. BAD, CDA.		

111	Ana	Sí.	
112	Juan	Igual se podría el ángulo ABC y DCB.	
113	Ana	Sí.	

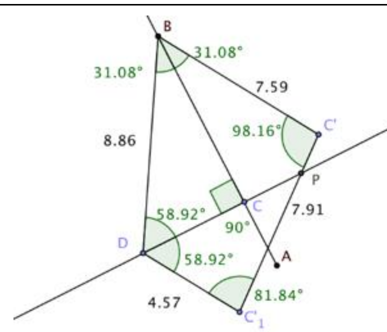
Juan inicia a formular una conjetura que recoja las observaciones realizadas hasta el momento [Síntesis]. En este punto él escribe algunas ideas [102], a la vez que Ana le sugiere involucrar algunas condiciones asociadas al uso de una notación específica y controla la formulación del enunciado. Al final logran formular un enunciado condicional que recoge el trabajo hecho por ellos.

114	Juan	Entonces para escribirlo como más… escribirlo sin notación. Es que en este caso estaríamos considerando… haciéndolo con notación se pueden dar dos opciones, pero estaríamos considerando solo una. Entonces, por ejemplo, aquí [señala la primera construcción] como tenemos que la conjetura que estamos tratando de visualizar es que teniendo… que solo un par de lados sea paralelo [segmentos BC’ y DC1’], entonces, como ese lado [DC1’] construye dos ángulos [BDC1’ y DC1’C’] en el cuadrilátero, se pueden tener dos casos. El primer caso sería BDC1’, la bisectriz de ese ángulo, y la bisectriz del ángulo C’BD, ahí son perpendiculares. El otro caso sería DC1’C’, la bisectriz de ese ángulo seria perpendicular a la bisectriz del ángulo BC’C1’. Entonces para que… si lo hacemos con notación estaríamos como… o bueno sí, deberíamos considerar también el otro [caso, ya que solo se reporta uno]. Pero yo no sé si sea necesario…	
115	Ana	Poner la otra…	
116	Juan	Poner, la otra… si ya se entienda, porque la otra sería hacerlo sin notación, para que sea como más…	
117	Ana	General.	
118	Juan	Parecería que quedaría más… mejor, se entendería mejor, entonces… [mira la pantalla]	S
119	Inv	¿Entonces qué quieren hacer?	
120	Juan	Hacerlo sin notación. La conjetura hacerla sin notación. Entonces, dado un cuadrilátero…	
121	Ana	Con dos lados paralelos…	
122	Juan	Si un par de lados son paralelos, entonces…	
123	Ana	La bisectriz de dos ángulos adyacentes…	
124	Juan	Las bisectrices de los ángulos adyacentes determinados por esos lados paralelos son perpendiculares.	
125	Ana	Ujum.	
126	Juan	[Escribe] Las bisectrices de los ángulos determinados por esos lados paralelos del cuadrilátero son perpendiculares [lee lo escrito]. Ahí cogería los dos casos.	
127	Ana	Sí.	

Aun cuando han formulado la conjetura, Juan reconoce la posibilidad de que bajo este enunciado se obtengan dos posibilidades, en términos de las parejas de ángulos para las que se satisface la propiedad [114]. Este resultado lo lleva a proponer, aunque no con total seguridad, que se formule un enunciado que no involucre notación específica y más bien esté expresado en términos generales. Ana no expresa su postura al respecto y es Juan quien decide [120] que se reelabore el enunciado en términos generales, sin utilizar una notación específica, enunciado que para él involucra las dos posibilidades que se pueden generar bajo las condiciones que el antecedente de la conjetura contempla.

128	Juan	Listo, ya tenemos la conjetura. Ahora justificarla. Entonces… [miran la pantalla en silencio]	P	29:28
129	Ana	Um, con triángulos… espérate ocultamos esto…[ocultan algunos objetos en pantalla para dejar el cuadrilátero y los datos relevantes a la vista]		
130	Juan	Sí, quita lo que no nos sirva. Quita las medidas… quita las líneas, para poder ver mejor… 		
131	Inv	¿Por qué hicieron eso?		
132	Juan	¿Quitar lo que no nos servía? Pues yo lo hice para poder ver mejor lo que necesitábamos y saber qué es lo que vamos ahí a justificar y no usar otra cosa que no… que no esté involucrada en la conjetura. Entonces… [miran la pantalla en silencio]	A	29:35
133	Inv	Ese silencio, ¿a qué se debe? ¿Qué están buscando?		
134	Ana	Un par de triángulos semejantes…		
135		[Juan dibuja en una hoja la situación presentada en la conjetura] 		

Habiendo formulado la conjetura en términos generales, Juan le comenta a Ana [128] que ahora deben proveer una justificación a esta [Planeación]. Ambos observan la pantalla por un tiempo y sin mencionar palabra alguna, buscando ideas que le permitan establecer una justificación a sus resultados [Análisis]. Ana propone involucrar triángulos en su justificación [129] y oculta algunos objetos geométricos que no aportan mayor información por sugerencia de Juan [130]. Por un tiempo guardan silencio mientras observan la pantalla y de repente Ana menciona que podrían utilizar triángulos semejantes [134]. Juan, quien no considera la idea de Ana en cuanto no responde a esta, opta por representar gráficamente en una hoja un trapecio y las bisectrices de dos ángulos adyacentes [135], en conformidad con lo declarado en su conjetura, sin mencionar palabra alguna sobre alguna estrategia que le permita proveer una justificación.

<table>
<tr><td>136</td><td>Ana</td><td>¿Y si medimos este ángulo? ¿Qué tal sea congruente a este?</td><td rowspan="2">P</td><td rowspan="2">35:35</td></tr>
<tr><td>137</td><td>Inv</td><td>Repite eso.</td></tr>
<tr><td>138</td><td>Ana</td><td>Um, espera. Una opción… para sacar triángulos semejantes… No sé espera…</td><td rowspan="4">I</td><td rowspan="4">35:45</td></tr>
<tr><td>139</td><td>Juan</td><td>Es que… por lo menos ahí, ¿qué triángulos? [la imagen en pantalla es diferente a la del papel, en la última se ven triángulos que en la primera no] El único sería este y este…</td></tr>
<tr><td>140</td><td>Ana</td><td>O este… [en pantalla hay otro triángulo que no ha sido nombrado]</td></tr>
<tr><td>141</td><td>Juan</td><td>¿Pero para qué lo usaríamos?</td></tr>
<tr><td>142</td><td>Ana</td><td>Espera, déjame intentarlo [nombra uno de los puntos de intersección de dicho triángulo como P y toma la medida del ángulo DPC1’, este valor no es igual a algún otro]. Mmm, no [Juan sigue observando su representación en la hoja de papel].
Había un hecho geométrico, ¿no? ¿No te acuerdas?

</td><td>A</td><td>36:32</td></tr>
</table>

El trabajo que realiza el grupo en este punto se veía truncado por la imposibilidad de identificar alguna ruta que les permitiera proveer una justificación a su conjetura. En algún momento Ana, apoyada en la representación en el papel hecha por Juan, propone determinar la medida del ángulo ABC y ADC [Planeación] pues considera que posiblemente sean congruentes y con ello podrían avanzar en la búsqueda de triángulos semejantes [136]. Sin esperar la reacción de Juan, Ana procede [Implementación] a medir estos ángulos en la construcción hecha en Geogebra, pero allí la representación realizada es diferente a la que tienen en papel y no le permite llevar a cabo su propuesta. En la representación hecha en el papel uno de los triángulos no corresponde con el presentado en pantalla, aun así, Ana determina la medida del ángulo CPC1’ para determinar si se cuenta o no con triángulos semejantes y ante los valores arrojados por Geogebra, descarta esta posibilidad.

143	Juan	¿Para qué?
144	Ana	Que decía de las bisectrices, si eran opuestas, eran paralelas… ¿te acuerdas?
145	Juan	Sí, pero era para el paralelogramo [en el papel dibuja un paralelogramo]. Digamos en el paralelogramo…
146	Ana	¿Y por alternos internos? Tenemos las paralelas y acá alternos internos, este [ADC] y este [ángulo que junto a ABC determinan el ángulo B. Ana describe su estrategia en el dibujo hecho en la hoja del trapecio].
147	Juan	Sí.
148	Ana	Y por ende, este [ABC] sería congruente a este [ADC] y ahí salen los triángulos semejantes. ¿Sí?
149	Juan	Tú, ¿a qué triángulos te refieres?
150	Ana	¿Los nombramos? [coloca nombres a los puntos del trapecio elaborado en la hoja] En este caso sería ACB
151	Juan	Sí.
152	Ana	ACD
153	Juan	Serían… semejantes.
154	Ana	Semejantes.
155	Juan	Sí. [observa la hoja] Es que, según esto, serían congruentes [segmentos AD y AB, marca la congruencia], un triángulo isósceles.
156	Ana	Por un criterio, ¿no? ángulo-lado-ángulo. Sale que estos ángulos [ADB y ABD] también van a ser congruentes.
157	Juan	Nosotros tenemos un caso que la bisectriz de un triángulo isósceles es la misma altura.
158	Ana	Um, también sirve.
159	Juan	Entonces ya saldría. Ya se tendría la… pero estoy mirando es en este caso que hicimos, en el que hicimos en Geogebra… miremos cómo, cómo calcar esa idea [la del papel] ahí [vuelven a la construcción en Geogebra]. Porque los… Involucra las paralelas, ¿sí? e involucra una bisectriz, ¿en este caso cuál?, cojamos…

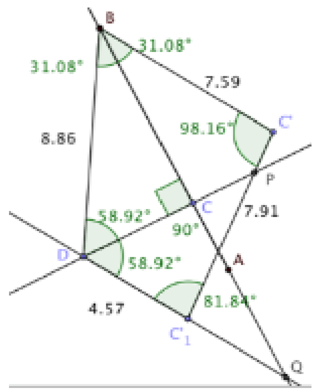
A

Ana no se detiene ante este resultado e inicia a recordar algunos hechos geométricos [142, 144] que le permitan establecer puentes entre la información con la que cuentan en el enunciado del problema y lo que deben justificar [Análisis]. Una idea propuesta por ella involucra utilizar ángulos alternos internos [146], apoyándose en los segmentos paralelos y un par de ángulos (ADC y ABC) que en la representación hecha en el papel se podrían catalogar bajo esta propiedad. Según Ana, esta idea los llevaría a obtener triángulos semejantes [148], pero Juan, quien acepta esta idea, asegura que los triángulos involucrados serían congruentes y que ambos determinarían un triángulo isósceles (ABD), con lo que complementa la idea inicial de Ana [155].

En una conversación sostenida por ambos, en la que involucran hechos geométricos conocidos, logran establecer una ruta que les permita formular una justificación [155 – 158]. Sin embargo, para Juan no es claro cómo llevar la idea plasmada en el papel a la construcción realizada en Geogebra, dado que en esta última uno de los dos triángulos involucrados en su justificación no es evidente. Para él, el problema radica en que en la representación hecha en Geogebra las bisectrices no intersecan a los segmentos paralelos y ello no permite determinar ángulos alternos internos [159].

160	Ana	Esta… ¿Abrimos otro archivo de Geogebra? lo hacemos así tal cual está [en la hoja de papel]	P	40:58
161	Juan	No, pues tendría que funcionar acá también.		
162	Ana	O sea, acá, este segmento.	A	41:36
163	Inv	¿Cuál segmento?		
164	Ana	C’C1’		
165	Inv	¿Qué pasa con ese segmento?		
166	Ana	Para determinar triángulos semejantes.		
167	Juan	No, porque la transversal en este caso [hoja de papel] es la misma bisectriz… ¿por qué en ese caso no? [representación en Geogebra]		
168	Inv	¿No qué? ¿Qué es lo que no cuadra?		
169	Juan	Lo que pasa es que en ese caso [representación en pantalla], o sea, lo que nosotros dibujamos, eh… tendríamos la justificación, pero en este caso [pantalla], la estamos tratando de calcar, pero no… En este caso la bisectriz [del ángulo DBC’] ya no interseca a la paralela [segmento DC1’], entonces en este caso no interseca la paralela, en este caso sí [papel]. Entonces, si hubiera intersecado la paralela, entonces si hubiera sido más sencillo porque tendríamos ángulos alternos internos.		
170	Ana	Ujum.		
171	Juan	La bisectriz se comporta como una transversal. Pero en este caso [pantalla] interseca al lado que no es paralelo.		
172	Ana	Este punto [C’] tendría que estar acá sobre la bisectriz [del ángulo BDC1’]		
173	Juan	Pero, igual es un caso que… un caso donde, que sirve, donde se cumple la conjetura. Bueno, de pronto si se proyecta, como tú dices…		

Ana, en respuesta a esta situación, propone representar en Geogebra la misma configuración que se tiene en papel [160]. Esta idea no es compartida por Juan, para él en ambos casos debería poderse involucrar el mismo argumento para dar validez a su conjetura [161]. Ana ahora trata de involucrar otros objetos geométricos que le ayuden a vislumbrar la forma de justificar la conjetura elaborada, pero para Juan las condiciones que en una representación se tienen no se corresponden con las que se tienen en la otra [167, 169]. Juan es claro al enfatizar que ya pudieron justificar la conjetura si se apoyan en la representación hecha en papel, pero que el panorama que enfrentan al analizar la construcción hecha en Geogebra no es afortunado dado que algunas intersecciones entre rectas y segmentos no se dan, lo que en consecuencia lleva a no contar con algunos objetos geométricos que apoyarían el proceso de justificación. Al final [173], Juan retoma una idea dada por Ana en la que se propone prolongar uno de los lados paralelos del trapecio y la bisectriz, con el fin de que la intersección que ellos requieren en su justificación se pueda tener.

174	Inv	¿Cómo así proyecta?		
175	Juan	Se extiende, se proyecta el lado del cuadrilátero y la bisectriz… para usar la información de los ángulos alternos internos [Ana construye la recta DC1’ y la recta AB]. Listo, entonces en ese caso tenemos ya… dos paralelas [segmento BC’ y recta DQ], la transversal que va a ser la bisectriz del ángulo C’BD, entonces los ángulos BQD [Q es nombrado como la intersección de las dos rectas construidas] y el ángulo C’BQ van a ser congruentes, por ser alternos internos… y están entre paralelas. Entonces esos ángulos van a ser congruentes. 	A	
176	Inv	¿Quiénes son congruentes?		
177	Ana	DCB…		
178	Juan	No, pero lo que nos sirve en este caso para sacar el triángulo isósceles.		
179	Ana	DQC con DBC.		
180	Juan	Primero tenemos por alternos internos que el ángulo DQC es congruente con el ángulo CBC’ y como el rayo BQ es bisectriz del ángulo DBC’, entonces vamos a tener que el ángulo CBD es congruente al ángulo CBC’ y por transitividad de la congruencia, entonces el ángulo CBD es congruente al ángulo CQD, listo. Entonces por hecho geométrico del triángulo isósceles, el lado…	V	45:43
181	Ana	DQ y DB son congruentes.		
182	Juan	Son congruentes y por un hecho geométrico…		
183	Ana	Ángulo-lado-ángulo…		
184	Juan	¿Para qué?		
185	Ana	Para esto, no.	A	46:29
186	Juan	Yo lo que había pensado era que habíamos manejado un hecho geométrico donde se tenía que [Ana asiente con la cabeza] la bisectriz de un triángulo isósceles, la bisectriz que parte del… del punto que determina los lados congruentes, esa bisectriz es la misma altura, bueno, la altura está contenida en esa bisectriz. Entonces el segmento DC está contenido en esa bisectriz y ese sería la altura del triángulo BDQ y como es la altura, por definición de		

		altura, el segmento DC es perpendicular al segmento BQ. Por lo tanto, las bisectrices son perpendiculares.	
187	Inv	¿Listo?	
188	Gru	Sí.	48:14

De acuerdo a Juan, se quieren convertir el rayo AB y el segmento DC1’ en rectas para que se intersequen, lo cual permitirá utilizar la estrategia que involucra los ángulos alternos internos para justificar la perpendicularidad de las bisectrices. Ana realiza esto en Geogebra y la representación con la que ahora cuentan en pantalla [175], aunque algo distinta a la que se tenía en papel, les permite retomar la estrategia que en la representación hecha en el papel había permitido justificar su conjetura. En algún momento Juan reconstruye [Verificación] un apartado de la justificación de la conjetura [180] debido a unas intervenciones de Ana que no guardan correspondencia con la ruta de justificación trazada inicialmente [Análisis]. De esta manera el grupo logra dar solución al problema propuesto.

ANÁLISIS DE PROTOCOLOS

En este capítulo y en el siguiente realizamos una interpretación del proceso de transcripción, segmentación y codificación. Particularmente, en este capítulo presentamos una descripción de cada uno de los grupos al afrontar el desarrollo de cada problema propuesto. El análisis contemplado es de naturaleza intra-grupal, esto es, se analizará cada grupo en sí mismo. En un primer momento, para cada problema, se presenta una descripción del proceso de resolución en función de los episodios más recurrentes, aquellos poco visibles, los que demandaron una cantidad de tiempo alta en su desarrollo y los que por el contrario fueron cortos en duración.

Adicionalmente, para cada problema se presenta una descripción del proceso de resolución realizado por cada grupo, en el que se caracteriza dicho proceso y se brinda una representación gráfica de este proceso, esto con el fin de reconocer patrones de comportamiento, bloques de episodios cíclicos y algún otro asunto que merezca atención de acuerdo a las actuaciones exhibidas por cada grupo. Al final de cada descripción de los problemas se presentan los comportamientos metacognitivos observados en cada episodio.

CARACTERIZACIÓN DE CARO Y PAUL

El grupo de Carol y Paul pudo dar respuesta a tres de los cuatro problemas propuestos. El tiempo empleado para resolver cada uno de estos fue menor al empleado por Ana y Juan, sin embargo, las respuestas provistas por Caro y Paul fueron en general diferentes a las elaboradas por el otro grupo. Las estrategias empleadas, tanto aquellas relativas al uso de GD como de la forma de abordar el problema también mostraron grandes diferencias. En lo que sigue se hace una descripción de estos resultados.

Problema 1: las bisectrices del cuadrilátero

En el caso del primer problema, que solicitaba enunciar las propiedades de un cuadrilátero de forma tal que las bisectrices de dos ángulos adyacentes fueran perpendiculares, se puede comentar que una revisión inicial de los episodios observados en su desarrollo, así como la frecuencia y duración de cada uno (Tabla 11), permite apreciar que este grupo se comprometió principalmente con acciones enmarcadas en los episodios de planeación e implementación, los cuales aparecen con una frecuencia muy superior respecto a los demás. Por otra parte, Los episodios de comprensión y exploración aparecen apenas en una oportunidad, lo cual no es bueno o malo en una primera lectura, pues habría que analizar lo acontecido en estos episodios para determinar la incidencia de los mismos en el proceso de resolución. Otra observación inicial permite reconocer que un poco más del 40% del tiempo empleado en el proceso de resolución se destinó a realizar acciones propias de implementación, mientras que acciones dirigidas a la comprensión del problema emplearon un tiempo muy reducido y solo se manifestaron en una oportunidad.

	Episodios	Tiempo	Porcentaje
Lectura	2	33	2,6
Comprensión	1	8	0,6
Análisis	2	229	17,9
Exploración	1	154	12,0
Planeación	9	152	11,9
Implementación	8	541	42,3
Verificación	4	78	6,1
Síntesis	5	84	6,6

Tabla 11. Distribución de tiempo y episodios problema 1

Un análisis del proceso de resolución, en función de los episodios observados (Figura 7), permite reconocer un momento inicial de lectura, seguido por un ejercicio de planeación e implementación, en el que intervinieron acciones dirigidas a la comprensión, el cual llevó a proponer un plan alterno al considerado inicialmente (episodio 8). A partir de este momento, el trabajo realizado se tornó cíclico puesto que se inició a analizar lo que ocurría en distintos tipos de cuadriláteros conocidos por los estudiantes (rectángulo, paralelogramo, trapecio y cometa). Este trabajo involucró planear la construcción del cuadrilátero contemplado e implementar dicho proceso, lo que llevaría a descartar o validar hipótesis que solo en algunos casos se verificaron. Una vez finalizaron el trabajo alrededor de estos cuadriláteros, reconocieron una propiedad entre ellos, revisaron el enunciado y procedieron a justificar dicha propiedad. Este ejercicio de justificación no requirió mucho tiempo, lo cual permite asegurar que para el grupo la dificultad del problema abordado se concentró significativamente en el proceso de conjetura y no el de justificación. Esto se puede apreciar en los protocolos correspondientes, en los que se puede observar el establecimiento de una justificación coherente y válida muy rápidamente. Al final del trabajo, verificaron la justificación realizada y formularon la conjetura que reportaba el trabajo realizado y las propiedades evidenciadas.

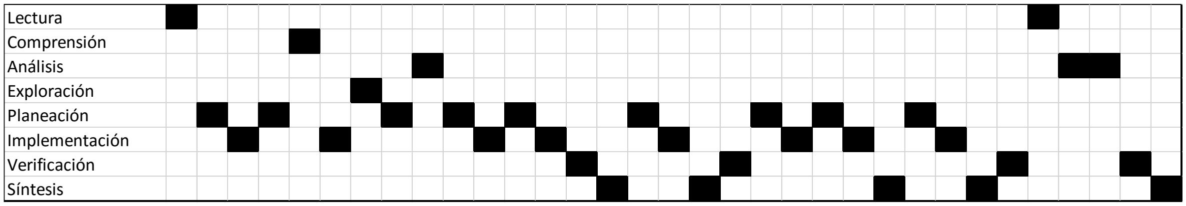


Figura 7. Episodios resolución del problema 1 a cargo de Caro y Paul

Como se mencionó arriba, este grupo no tuvo problemas al resolver el problema y el tiempo que empleó en ello no fue considerablemente alto; sin embargo, la conjetura enunciada reportó apenas el cumplimiento de la propiedad en un cuadrilátero particular (paralelogramo) y dejó de lado la posibilidad de reconocer a través de este problema una propiedad general que involucraba otros tipos de cuadriláteros.

Comportamientos metacognitivos evidenciados

Lectura. Este episodio solo tuvo presencia en dos oportunidades, al leer inicialmente el enunciado del problema y al revisar qué debía hacerse una vez se finalizó la búsqueda de una propiedad del cuadrilátero. En el primer momento no se observaron comportamientos metacognitivos puesto que el trabajo de los estudiantes se limitó a leer el enunciado para conocer lo que debían hacer, acciones de tipo cognitivo meramente. En el segundo momento que este episodio tiene presencia se pudieron reconocer algunos comportamientos metacognitivos como lo fueron la identificación de partes del problema que pudieran ser omitidas y la lectura de las partes principales del enunciado, acciones que permitieron comprender lo que debía realizarse y dirigir sus acciones hacia la justificación de la propiedad descubierta.

Comprensión. Aunque este episodio solo se manifestó en una oportunidad con una duración muy corta, mientras se realizaba la planeación de una estrategia, comportamientos metacognitivos como retomar las condiciones expuestas en el enunciado del problema permitieron orientar de forma adecuada las acciones que se debían realizar. El hecho de que no se presentaran otros episodios de comprensión a lo largo del proceso de resolución y que el trabajo del grupo llegara a buenos términos, sin que se presentaran momentos de incertidumbre o confusión, son aspectos que llevan a considerar que lo que el problema planteaba fue comprendido con claridad por los estudiantes al momento de dar una lectura inicial y reconocer en el enunciado lo que debían realizar.

Análisis. Durante dos oportunidades este episodio se presentó. En un primer momento se intentó proveer una justificación a una propiedad que se formuló de manera tentativa casi en la primera parte del proceso de resolución. Durante este episodio se reconocieron comportamientos ligados a la formulación de una justificación como lo fueron la extracción de información de una representación gráfica, el uso de hechos geométricos para soportar afirmaciones, el establecimiento de conclusiones soportadas en la exploración realizada en GD y el apoyo en representaciones gráficas para soportar ideas. En la segunda ocasión que este episodio se presentó, los estudiantes iniciaron el proceso de justificación de la propiedad descubierta. En este punto se utilizaron representaciones gráficas como apoyo para la formulación de afirmaciones, o el rechazo de algunas propuestas, a la vez que accedieron a conocimiento relevante que permitiera avanzar en la formulación de la justificación de la propiedad. El análisis realizado en el primer momento permitió proyectar una ruta de justificación a una potencial propiedad, la cual fue retomada en el segundo momento, cuando se había formulado una propiedad general. En estos episodios no se presentaron mayores inconvenientes y se desarrolló un esquema de argumentación convincente para los estudiantes.

Exploración. Aunque este episodio tuvo presencia en una única oportunidad, su tiempo de duración fue notable. En este episodio se procedió a arrastrar los vértices del cuadrilátero con el fin de reconocer propiedades que implicaran la perpendicularidad de las bisectrices, se consideró una hipótesis que se sometió a prueba y fue descartada y con ello se avanzó a una fase de planeación que involucraba trabajar a partir de cuadriláteros particulares. En este episodio se observaron comportamientos metacognitivos como la manipulación de objetos geométricos en consideración a las condiciones iniciales del problema, la examinación de posibles relaciones entre los objetos geométricos construidos, la anticipación de resultados o relaciones geométricas, el uso de representaciones gráficas o simbólicas para apoyar la formulación de afirmaciones y la verificación de la validez de propiedades o relaciones. Cabe mencionar que la naturaleza de estos comportamientos obedece al uso de la geometría dinámica. Sin embargo, debe mencionarse que la exploración realizada no llevó a los estudiantes a reconocer la presencia de alguna propiedad que los condujera a establecer un resultado general, más bien los llevó a descartar una estrategia enfocada en el descubrimiento de propiedades y optar con ello al trabajo apoyado en casos particulares.

Planeación. Este es el episodio con mayor aparición a lo largo del proceso de resolución, aunque la extensión de los mismos en conjunto no lo es. Esto no es extraño, pues el ejercicio de planeación contempla proyectar una ruta de trabajo que puede, en algunas ocasiones, realizarse de forma espontánea y sin reflexionar sobre las implicaciones o pertinencia de estas propuestas. En el proceso de resolución estudiado se observaron estos episodios cuando se propuso realizar la construcción de un cuadrilátero genérico para estudiar las propiedades que harían que se cumpliera la propiedad solicitada, igualmente se observaron episodios de planeación en el momento en que se proponía construir algún tipo particular de cuadrilátero. Los comportamientos metacognitivos identificados en estos episodios se relacionaron con la elaboración de un plan y la proyección de formas de proceder en atención a un objetivo definido, la escogencia o realización de acciones pertinentes, el cuestionamiento de alguna estrategia adoptada y su examinación o análisis, verificación de pasos realizados y detalles del plan trazado.

Implementación. Este es el episodio que junto a la planeación tuvo el mayor número de apariciones. Sin embargo, este episodio fue el que mayor tiempo reportó. Como se mencionaba en un principio, un poco más del 40% del tiempo destinado para la resolución del problema correspondió a la realización de acciones enmarcadas en este episodio y en siete de las ocho oportunidades que se presentó, ocurrió inmediatamente después de trazar algún plan. En la otra ocasión que este episodio ocurrió, hubo un ejercicio de comprensión del problema, posterior a la planeación de alguna estrategia y previo a la implementación de la misma, el cual permitió tener claridad sobre lo que debía realizarse en función de lo demandado por el problema estudiado. Esto indica que este grupo presentó una tendencia a realizar acciones en correspondencia a las propuestas de acción proyectadas y no a implementar acciones sin tener claridad sobre un plan que las regulara. Los comportamientos metacognitivos observados en este episodio correspondieron a la realización de acciones en consonancia con algún plan trazado, el control sobre la realización de las mismas con base en el plan trazado, el contraste entre las acciones realizadas y lo proyectado la búsqueda de información en las representaciones gráficas construidas, el cuestionamiento de las acciones realizadas, la anticipación de resultados, el acceso a conocimiento relevante y el establecimiento de conclusiones apoyados en el trabajo realizado.

Verificación. Este episodio tuvo presencia en cuatro oportunidades, tres de ellas encaminadas a revisar si el resultado obtenido en el análisis hecho en cuadriláteros particulares se correspondía con lo observado en un momento inicial y una cuarta ocasión en la que se retomaron argumentos elaborados en el proceso de justificación con el fin de tener claridad sobre los mismos y el trabajo realizado. Un asunto que vale la pena reportar es que en uno de estos episodios la verificación tuvo presencia en el momento que Paul propuso la construcción robusta de un rectángulo para verificar el cumplimiento de la propiedad estudiada, sin embargo, esta idea no se desarrolló en tanto Caro ignoró su propuesta e intentó realizar un análisis de la situación representada en pantalla. Los comportamientos metacognitivos identificados en estos episodios fueron la representación de objetos o relaciones geométricas para verificar algún resultado sobre el que se tiene sospecha, la generalización de resultados a partir del trabajo realizado, la revisión del trabajo realizado con el fin de no olvidar detalles, la revisión del enunciado del problema y lo que este solicita, la verificación de los resultados y la pertinencia de las respuestas obtenidas y la elaboración de justificaciones para soportar o rechazar ideas.

Síntesis. Este episodio se manifestó en cinco oportunidades y su duración no fue alta en comparación a otros episodios. En cuatro de las cinco oportunidades se observó la presencia de este episodio al finalizar el trabajo de análisis con cada uno de los cuadriláteros contemplados, momentos en los que se reflexionaba sobre los resultados obtenidos y se avanzaba en la consolidación de una propiedad genérica que incluyera los casos particulares abordados. En la quinta oportunidad que este episodio apareció, al final del proceso de resolución, se formuló una conjetura que recogía el trabajo realizado y los descubrimientos hechos. Los comportamientos metacognitivos asociados a este episodio que pudieron ser observados fueron el establecimiento de conclusiones apoyadas en la exploración realizada y la generalización de resultados a partir de la información recolectada.

Problema 2: los triángulos separables

El segundo problema propuesto solicitaba que se determinaran las propiedades del triángulo ABC que hacían que dos triángulos determinados por este, y un punto llamado P, fueran isósceles. En el proceso de resolución se observó (Tabla 12) que el grupo en esta oportunidad tuvo un compromiso más equilibrado entre los distintos episodios, aunque los referidos a lectura, análisis, planeación e implementación sobresalieron, mientras que ejercicios de comprensión y exploración tuvieron una presencia mínima. En un análisis posterior evidenciaremos si esta frecuencia tuvo o no incidencia en el proceso de resolución. En términos del tiempo demandado en cada episodio puede mencionarse que casi un 40% del tiempo empleado a la resolución se destinó a realizar acciones de implementación y un 20% del mismo se destinó a realizar acciones asociadas al análisis de la situación estudiada, en contraposición, el único episodio de comprensión evidenciado demandó un 2% con respecto al total del tiempo empleado y las acciones encaminadas a la planeación requirieron apenas un 3% aproximadamente.

	Episodios	Tiempo	Porcentaje
Lectura	4	83	11,6
Comprensión	1	16	2,2
Análisis	3	146	20,3
Exploración	1	37	5,2
Planeación	3	20	2,8
Implementación	5	275	38,3
Verificación	2	95	13,2
Síntesis	2	46	6,4

Tabla 12. Distribución de tiempo y episodios problema 2

Al revisar el proceso de resolución (Figura 8) se puede observar un momento inicial en que hay una intermitencia entre episodios de lectura e implementación, en los que se iba progresivamente representando las condiciones del problema a medida que estas se leían. Posteriormente se da inicio a un episodio de exploración en el que a través de las longitudes de los segmentos se busca alguna propiedad, lo que lleva a un ejercicio de comprensión sobre las condiciones del problema y lo que este solicita. Una vez esto ocurre, se analiza la posibilidad de que algunos tipos de triángulo satisfagan la condición estudiada y posterior a esto se planea analizar lo que ocurre en el caso particular del triángulo isósceles y equilátero, implementando dichas acciones una vez se proyectan. Esto último se traduce en un cambio continuo entre episodios de planeación e implementación. El resultado obtenido no es afortunado en correspondencia con lo que se esperaba y lleva a los estudiantes a considerar una posición del punto P en el triángulo, proveyendo una explicación a esta propiedad. Esta hipótesis se pone a prueba, corroborando su validez, lo que lleva a los estudiantes a proveer una justificación a tal resultado, apoyada en elementos teóricos conocidos por ellos, y repetir esta justificación para tener seguridad de la misma. Al final se propone una conjetura que sintetiza lo descubierto, se lee el enunciado para ver si algo más se solicita y, viendo que no se solicita algo más, se concluye que su resultado es acertado.

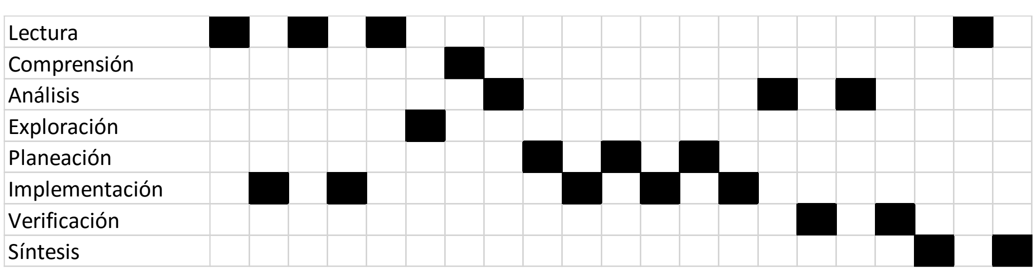


Figura 8. Episodios resolución del problema 2 a cargo de Caro y Paul

El trabajo realizado por el grupo en esta oportunidad, el cual requirió un tiempo muy corto en comparación a los demás, no permitió formular un resultado adecuado, aun cuando ellos tuvieron seguridad de que su respuesta era acertada. Este resultado tuvo lugar gracias la falta de comprensión sobre lo que el problema solicitaba, pues en este se mencionaba que ambos triángulos (APC y PCB) debían ser isósceles y los estudiantes, en el marco de su proceso de exploración, solo pudieron establecer una configuración en la que uno de estos triángulos era isósceles, justificando además que no era posible otra posibilidad.

Comportamientos metacognitivos evidenciados

Lectura. Este episodio tuvo presencia en cuatro oportunidades, tres de las cuales se situaron en una parte inicial del proceso de resolución, en las que progresivamente se iban representando condiciones en pantalla. El cuarto momento en que este episodio se manifestó ocurrió cuando el grupo quiso reconocer si el problema solicitaba realizar algo adicional o ya su trabajo correspondía con lo solicitado. En los tres primeros momentos se reconocieron comportamientos metacognitivos como la lectura clara del enunciado para no perder información suministrada por este, la identificación de las condiciones del problema, el control de las acciones ejecutadas o representaciones hechas y la elaboración de una síntesis de lo que el problema solicitaba. Estas acciones permitieron realizar una representación adecuada de lo propuesto en el problema y con ello avanzar en la búsqueda de información relevante. En el cuarto momento que este episodio se manifestó, solo se pudo reconocer un comportamiento metacognitivo asociado a la revisión del enunciado del problema para identificar lo que se solicitaba, comportamiento que llevó a que el grupo diera finalización a la fase de búsqueda de información y justificación de sus resultados e iniciara la formulación de una síntesis de su trabajo.

Comprensión. Este episodio se presentó en una única oportunidad, en la que Caro parafraseo las condiciones del problema en sus palabras para tener claridad sobre lo que se debía realizar, previo a realizar cualquier intento de solución. Precisamente, el único comportamiento metacognitivo observado en este episodio, correspondiente a lo mencionado anteriormente, fue la reformulación de la situación problema propuesta en términos propios. Sin embargo, adolece que en este episodio no se hubiera reconocido la especificidad de que los dos triángulos, de manera simultánea, fueran isósceles. Tener clara esta condición desde el inicio hubiera llevado a que una exploración más rigurosa se hubiera realizado y que no se optara por asumir como verdadera una propiedad que de manera repentina emergió y no respondía a lo solicitado.

Análisis. En tres oportunidades pudimos observar este episodio. En dos de estas oportunidades se formularon propiedades que potencialmente podrían cumplir los triángulos para que se diera respuesta al problema abordado, mientras que en la tercera oportunidad se elaboró una justificación de una propiedad identificada. En el primer momento que este episodio se observó, se pudo reconocer un comportamiento asociado a la anticipación de resultados, momento en el que se consideró que el triángulo podría ser equilátero o isósceles. En el segundo momento en que este episodio tuvo presencia, en el cual se contempló una posible propiedad del punto P, se identificaron comportamientos metacognitivos como el establecimiento de conclusiones apoyadas en construcciones en GGB y la utilización de representaciones gráficas. En el tercer y último momento, se procedió a justificar la propiedad que anteriormente se había contemplado. En este punto se reconocieron comportamientos como el acceso al conocimiento relevante, la elaboración de una justificación para soportar ideas, el establecimiento de conclusiones con base en la exploración o construcción realizada y el cuestionamiento del conocimiento involucrado.

Exploración. Este episodio solo pudo observarse en una oportunidad y tuvo una duración corta en comparación a otros. El grupo realizó acciones enmarcadas en este episodio una vez finalizó la representación en GGB de lo que el problema planteaba, estas acciones se limitaron a determinar las longitudes de los segmentos y dejaron de lado por completo un trabajo enfocado en el descubrimiento de invariantes o propiedades para el triángulo ABC. En este episodio se pudieron reconocer comportamientos como la selección y realización de acciones pertinentes y el control dado al desarrollo de dichas acciones, esto para que se procediera en conformidad a lo proyectado. Este episodio finalizó cuando los estudiantes contemplaron la posibilidad de que el triángulo ABC fuera uno conocido por ellos (equilátero e isósceles), lo que cerró la posibilidad de descubrir que este podía ser inclusive isósceles.

Planeación. Aunque tuvo presencia en tres momentos, la duración total de estos episodios fue considerablemente baja, sin embargo debemos considerar que, como se dijo en un inicio, esto no es un indicador negativo. Los episodios de planeación ocurrieron cuando se estudió el cumplimiento o no de la propiedad en los triángulos equiláteros o isósceles. En estos episodios se reconocieron comportamientos tales como la elaboración de un plan de trabajo y la modificación del mismo cuando era necesario. Adolece que no se evidenciara un episodio de esta naturaleza en el cual se proyectara arrastrar los puntos hasta obtener una configuración acorde a lo solicitado por el problema, propuesta que hubiera generado un proceso de resolución posiblemente diferente.

Implementación. Este es el episodio de mayor frecuencia y mayor duración observado. En dos de las cinco oportunidades que se observó este episodio se representaron las condiciones del problema en GGB y en las otras tres se realizaron acciones en correspondencia con los planes trazados (tres episodios también). Respecto a los comportamientos metacognitivos, en los primeros dos momentos se identificaron algunos como la selección o realización de acciones pertinentes de acuerdo a algún objetivo, el control sobre la realización de dichas acciones y el uso de notación simbólica para referirse a los objetos y relaciones geométricas. En los otros tres momentos de presencia de dicho episodio se observaron comportamientos como la ejecución de acciones en correspondencia con algún plan trazado, el control sobre la ejecución de estas acciones, la utilización de representaciones simbólicas y gráficas para comunicar ideas, la anticipación de resultados, la modificación de las construcciones realizadas, el uso de GGB como recurso para el soporte o rechazo de alguna relación, el establecimiento de conclusiones como fruto del trabajo realizado y el acceso a conocimiento relevante.

Verificación. Este episodio se manifestó en dos oportunidades nada más. En la primera se involucró GGB para verificar si la propiedad formulada por Caro era verdadera, lo cual fue así. En el segundo momento se repitió la justificación elaborada, como mecanismo de verificación de que no se estaba olvidando u omitiendo algún detalle. En el primer momento se reconocieron comportamientos metacognitivos como lo son el uso de representaciones gráficas como soporte para rechazar o validar alguna propiedad y la reformulación de resultados y conclusiones para estos se ajuste a lo descubierto. En el segundo momento se identificaron comportamientos como la revisión de la validez de un resultado o la generalidad del mismo, el uso de representaciones gráficas para comunicar ideas y la reconstrucción de argumentos que previamente se presentaran para tener seguridad de su pertinencia. Se hubiese esperado que en este episodio, al momento de contrastar lo obtenido a partir del proceso de resolución con lo que el problema solicitaba, los estudiantes se hubieran percatado de que no habían resuelto realmente el problema, desafortunadamente el ejercicio de verificación se limitó a revisar la completitud de la justificación formulada.

Síntesis. Este episodio se presentó en dos oportunidades en el proceso de resolución, en la primera oportunidad se enuncian las condiciones que debe cumplir el punto P para que uno de los triángulos sea isósceles, mientras en que en la segunda oportunidad, al haber realizado una lectura final del enunciado del problema, la propiedad encontrada se ratifica. En estos episodios solamente se pudieron reconocer dos comportamientos metacognitivos, los cuales fueron el establecimiento de conclusiones con base en la exploración realizada y la inclusión de las evidencias y resultados acopiados a lo largo de su trabajo. Llama la atención que al enunciar la propiedad, que habla de las condiciones del punto P, se hace mención al cumplimiento de que ambos triángulos son isósceles, aun cuando solamente uno de estos lo es y el otro ni siquiera se puede determinar.

Problema 3: los puntos medios el cuadrilátero

El tercer problema propuesto solicitaba determinar el tipo de cuadrilátero en el que los puntos medios de sus lados determinaban un rectángulo. La distribución y frecuencia de los episodios observados (Tabla 13) permite asegurar los episodios de planeación e implementación mostraron mayor aparición, mientras que episodios de comprensión y exploración fueron nulos, inclusive los otros episodios tuvieron una aparición mínima. Esto llevaría a afirmar que en este problema los estudiantes no requirieron hacer un ejercicio de comprensión, es decir que para ellos el problema propuesto era lo suficientemente claro una vez se realizó su lectura. Sin embargo, sí llama la atención que acciones de exploración no fueran ejecutadas. Al revisar el tiempo de dedicación de cada uno de estos de estos episodios se aprecia que la mitad del tiempo requerido en el proceso de resolución se empleó en acciones de implementación, seguida por la duración del episodio de análisis con un 30% respecto al tiempo demandado para resolver el problema. Nuevamente las acciones de planeación. Aun cuando tienen una alta frecuencia de aparición de episodios, representan un porcentaje muy bajo.

	Episodios	Tiempo	Porcentaje
Lectura	1	26	2,0
Comprensión	0	0	0,0
Análisis	2	392	30,2
Exploración	0	0	0,0
Planeación	6	38	2,9
Implementación	6	654	50,5
Verificación	3	165	12,7
Síntesis	2	21	1,6

Tabla 13. Distribución de tiempo y episodios problema 3

Las cifras mostradas arriba muestran un panorama algo particular por la ausencia de dos episodios y la alta aparición de otros dos. Al observar el desarrollo del proceso de resolución (Figura 9) se puede reconocer un único momento de lectura al inicio del problema, lo cual es natural, y una marcada presencia de episodios de planeación, seguidos de episodios de implementación. Esta constante dinámica, que correspondió a la consideración de un tipo particular de cuadrilátero y su posterior puesta a prueba, para validar o descartar el cumplimiento de la propiedad estudiada en el mismo, se ve en una oportunidad cortada por otros episodios. Particularmente, en el marco del trabajo realizado por los estudiantes alrededor de los casos estudiados, se realiza un único ejercicio de verificación al construir un cuadrado, acción motivada por la observación del posible cumplimiento de la propiedad en dicho cuadrilátero al transformar el cuadrilátero original, lo que los lleva además a formular una síntesis del trabajo realizado y los resultados obtenidos. Al final del trabajo enfocado en verificación de cuadriláteros particulares, se formula un resultado que involucra únicamente a los rombos y este se somete a análisis con el fin de formular su justificación, episodio en el que interviene un episodio de verificación orientado a retomar una parte de los argumentos ya expuestos para complementar la justificación de la propiedad.

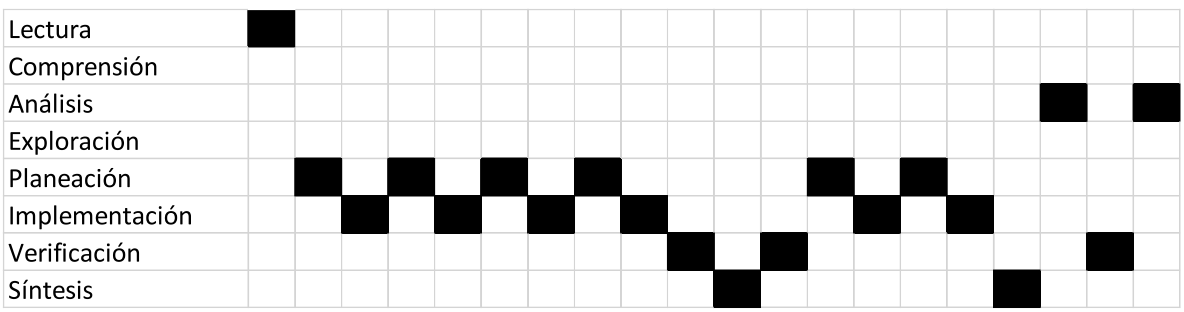


Figura 9. Episodios resolución del problema 3 a cargo de Caro y Paul

El desarrollo expuesto lleva a pensar que los estudiantes no tuvieron dificultad al abordar el problema, lo cual justifica la ausencia de episodios de comprensión, sin embargo la respuesta dada como resultado de su trabajo es local apenas y deja de lado un resultado general, algo similar a lo ocurrido en el primer problema que enfrentaron. En este punto se podría cuestionar el hecho de no haber realizado algún ejercicio de exploración y proceder, por el contrario, nuevamente a trabajar apoyados en casos particulares.

Comportamientos metacognitivos evidenciados

Lectura. Con una única presencia en el proceso de resolución, en este episodio no se manifestaron comportamientos metacognitivos, dado que las acciones realizadas fueron principalmente cognitivas, dirigidas a leer el enunciado para posteriormente representar en GGB las condiciones del problema.

Comprensión. No tuvo presencia en este proceso de resolución. Presumiblemente una lectura única del enunciado del problema fue suficiente para que los estudiantes tuvieran claridad sobre lo que debía realizarse y no se cuestionaran sobre la pertinencia o no de algunas acciones realizadas.

Análisis. Este episodio solo tuvo presencia en dos oportunidades, las cuales se situaron en el momento que se procedió a elaborar una justificación que validara la propiedad descubierta a través de los episodios previos. En estos episodios, de la misma naturaleza, se reconocieron comportamientos como la indagación sobre los motivos que llevan al cumplimiento de una propiedad, el acceso a conocimiento relevante de acuerdo a los datos e información con los que se cuenta, la elaboración de una justificación para soportar un resultado, el uso de representaciones gráficas y simbólicas y el cuestionamiento de los argumentos elaborados por su compañero. El hecho de que este episodio no se hubiese materializado en otros momentos previos dentro del proceso de resolución es indicador de que los estudiantes no presentaron estados de incertidumbre o confusión, lo cual se justifica también por la ausencia de acciones relacionadas con la comprensión.

Exploración. No tuvo presencia en este proceso de resolución. Sin embargo, debe señalarse que, dada la particularidad de la respuesta formulada, se debe reconocer que un episodio de exploración hubiese llevado a reconocer posiblemente otras propiedades más generales. Un análisis más detallado de esta situación se presente en el siguiente capítulo.

Planeación. Aunque es uno de los episodios con mayor frecuencia, su duración total es realmente poca. Su aparición se da en el momento en que se contempla que se trabaje con distintos tipos de cuadriláteros (paralelogramo, rectángulo, cuadrado, rombo y trapecio isósceles). En estos episodios de la misma naturaleza se reconoció un único comportamiento metacognitivo, este fue la elaboración de propuestas de trabajo que respondan a un objetivo, el cual era el trabajo apoyado en distintos tipos de cuadriláteros. Dado el tipo de ejercicios de planeación reportados, así como la ausencia de episodios de exploración, se puede comentar que este grupo tiene una tendencia natural a trabajar apoyados en la verificación del cumplimiento o no de alguna propiedad en cuadriláteros comunes, dejando de lado la posibilidad de descubrir relaciones nuevas a través de la exploración.

Implementación. Este episodio también se observó en seis oportunidades, al igual que la planeación, aunque su duración a lo largo del proceso de resolución correspondió casi a la mitad total. Su aparición se dio siempre después de los episodios de planeación y correspondió a ejecutar las acciones o propuestas presupuestadas, asunto que también permite reconocer un modo de trabajar en este grupo, el cual corresponde a implementar un conjunto de acciones una vez se ha planeado un esquema de trabajo. Los comportamientos metacognitivos evidenciados en esto episodios con una naturaleza similar correspondieron a la realización y ejecución de acciones en correspondencia a algún plan, la sugerencia de incorporar nuevas acciones para lograr un objetivo o meta trazada, la selección y realización de acciones que fueran pertinentes, el acceso a conocimiento relevante, el control de las acciones desarrolladas, el uso de representaciones gráficas a través de GGB, el cuestionamiento de los resultados obtenidos o argumentos propuestos, la anticipación de resultados y su corroboración, el soporte teórico de afirmaciones elaboradas, la reflexión sobre las condiciones del problema estudiado y el establecimiento de resultados a partir de la exploración realizada.

Verificación. Este episodio se manifestó en tres oportunidades. En la primera oportunidad se realizaron acciones para verificar si en un cuadrado se cumplía la propiedad estudiada, en la segunda oportunidad se realizaron acciones encaminadas a verificar el cumplimiento de una propiedad en un paralelogramo y en la tercera oportunidad se reconocieron acciones encaminadas a repasar y retomar algunos argumentos previamente elaborados. Los comportamientos evidenciados en el primer momento correspondieron a la realización de acciones en correspondencia a un plan trazado, la incorporación de las condiciones del problema para proceder a desarrollar alguna estrategia, el uso de representaciones gráficas y el establecimiento de resultados apoyados en la construcción realizada. En el segundo momento en que este episodio se manifestó se reconocieron comportamientos como elaboración de un plan de trabajo, la realización de acciones en consonancia con el plan trazado, el uso de representaciones gráficas en GGB, el establecimiento de resultados a partir de las construcciones realizadas, la incorporación de las condiciones dadas por el problema, la anticipación de resultados y el acceso a conocimiento relevante. En el tercer momento se reconocieron comportamientos como lo son la reconstrucción de argumentos elaborados previamente para avanzar en la justificación y el uso de representaciones gráficas.

Síntesis. Este episodio se manifestó en dos oportunidades, uno en el que se estableció el cumplimiento de la propiedad en el cuadrado y otro en el que, apoyados en el trabajo realizado, se estableció que los rombos satisfacían tal propiedad. En estos dos momentos se observaron comportamientos metacognitivos como la incorporación de resultados previamente encontrados para establecer resultados generales, el acceso a conocimiento relevante, el cuestionamiento de resultados obtenidos y la generalización de resultados con base en evidencia empírica.

Problema 4: la búsqueda de cuadriláteros

El cuarto problema abordado proponía realizar una construcción y sobre esta realizar una exploración que llevara a descubrir los tipos de cuadriláteros que podían configurarse, posteriormente proveer una justificación en cada uno de los casos descubiertos. El trabajo realizado por el grupo frente a este problema permite reconocer una alta presencia de episodios de implementación y planeación, así como una presencia casi nula de episodios de comprensión, el cual solo tuvo presencia en una oportunidad. Respecto al tiempo empleado en el desarrollo de cada episodio, el análisis e implementación, quienes demandaron mayor tiempo dentro del proceso de resolución, requirieron aproximadamente un 24% y 36% respectivamente del tiempo total. Por su parte, un porcentaje de tiempo muy bajo se evidenció en el episodio de comprensión, con lo que este episodio se convierte en aquel de menor aparición y menor duración. En un análisis posterior mostraremos si esta particularidad tuvo o no alguna incidencia en el proceso de resolución y la respuesta obtenida.

	Episodios	Tiempo	Porcentaje
Lectura	4	245	9,1
Comprensión	1	22	0,8
Análisis	6	645	23,9
Exploración	3	241	8,9
Planeación	14	194	7,2
Implementación	10	979	36,2
Verificación	4	262	9,7
Síntesis	5	116	4,3

Tabla 14. Distribución de tiempo y episodios problema 4

El proceso de resolución (Figura 10) tiene inicio con la lectura del enunciado y un momento de planeación e implementación, en el que se decide ir representando progresivamente lo que el problema propone. A diferencia de los anteriores problemas abordados, en este no es posible reconocer un patrón o ciclo de episodios que sea repetitivo. Esto puede deberse a que en este problema, a diferencia de los anteriores, el contexto del mismo colocaba desde el inicio una configuración que debía estudiarse, por lo que la estrategia utilizada por los estudiantes en pasadas oportunidades no podría ser involucrada de la misma forma. Sin embargo, hay un asunto que merece la pena ser mencionado en relación a la interacción entre los episodios. Si bien es cierto que una mirada inicial del proceso realizado lleva a reconocer una dispersión entre los episodios presentes y con ello la ausencia de un comportamiento regular, una lectura de los momentos vividos por los estudiantes permite apreciar cuatro sucesos en los que es posible, de manera local, reconocer un comportamiento regular y lo que denominaríamos un dialogo entre los episodios involucrados en cada suceso.

En aquellas oportunidades en que se reconocieron propiedades del punto P, como ser punto medio de las diagonales del cuadrilátero, o en que se descubrió que ni rombos ni cometas podían ser obtenidas mientras que rectángulos sí, o en que se vio la imposibilidad de obtener un trapecio y se proveyó una justificación a este hecho, se puede apreciar un recorrido entre episodios de planeación, implementación, análisis, exploración y síntesis, que si bien no es idéntico en cada suceso, en términos del orden de aparición de episodios, si permite mencionar que la obtención de los resultados en cada suceso se podría haber dado por la articulación y presencia de estos episodios de manera ordenada u organizada, diferente al resto del proceso de resolución, donde se aprecian rupturas entre los episodios y con ello un trabajo que no es productivo. Al final se formula una conjetura que recopila su trabajo y descubrimientos.

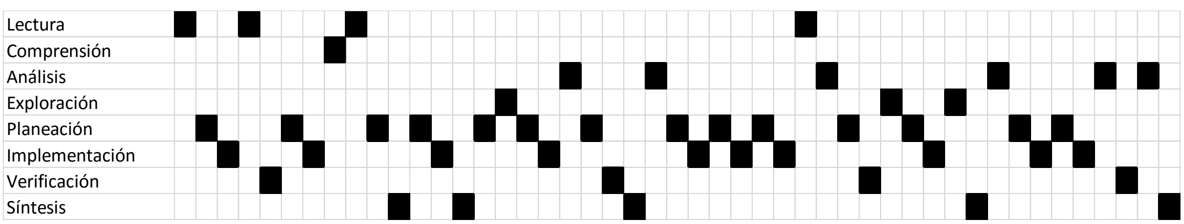


Figura 10. Episodios resolución del problema 4 a cargo de Caro y Paul

El tiempo empleado por este grupo para resolver el problema fue superior al empleado en los anteriores problemas y aunque descubrieron los tipos de cuadriláteros que podían obtenerse en de dicha configuración, las propiedades expresadas en la conjetura podrían ser objeto de discusión. Igualmente, no se brindó alguna conjetura que reportara la obtención del rectángulo y la que se formuló solo reportaba la obtención del paralelogramo.

Comportamientos metacognitivos evidenciados

Lectura. Solo en cuatro oportunidades se evidenció este episodio, dos de las cuales se ejecutaron para reconocer lo que el problema solicitaba al inicio del proceso de resolución. La tercera ocasión que este episodio tiene presencia corresponde a una lectura realizada por Caro, para ayudar a comprender lo que el problema establecía en un ejercicio de comprensión. La última oportunidad tiene lugar cuando se quiere contrastar el desarrollo de una propuesta de Paul con lo que el problema realmente establecía. En las primeras dos oportunidades que se identificó este episodio se observaron comportamientos metacognitivos como el control de las acciones realizadas, el acceso al conocimiento relevante y la revisión del enunciado para acceder a conocimiento relevante. En la tercera oportunidad que se identificó este episodio se reconoció un único comportamiento asociado a la lectura del enunciado para comprender la situación expuesta. En la última oportunidad que se evidencia este episodio, el único comportamiento observado correspondió a la revisión de las condiciones del problema para proceder en correspondencia a las mismas. En esta ocasión el episodio de lectura permitió descartar un proceso que se ejecutaba, dada la no consideración de las condiciones expuestas a través del problema en la representación gráfica que se estaba realizando.

Comprensión. Este episodio solo se manifestó en una oportunidad, cuando se trató de interpretar lo que el problema solicitaba, pero la inseguridad sobre lo que se solicitaba llevó a retomar nuevamente el enunciado del problema y leer allí lo que se solicitaba. En este episodio se reconoció un comportamiento relacionado con la clarificación del objetivo del problema. El que no se manifestara este episodio en otra oportunidad, permitiría señalar que para los estudiantes este era claro, tanto en lo ofrecido como en lo solicitado. Esto se soporta también en el hecho de que a lo largo del proceso de resolución no se apreciaron momentos de bloqueo o desconocimiento, por parte de los estudiantes, sobre lo que se debía realizar.

Análisis. En seis oportunidades se pudo observar este episodio, cinco de ella relacionadas con la explicación de un resultado observado y la otra relacionada al estudio de una construcción que no ofrecía resultados afortunados. En la primera oportunidad Paul intenta ofrecer una explicación a la imposibilidad de obtener un cuadrado y cometa, en la que se apoya en las condiciones del problema. En este episodio se aprecian comportamientos como la elaboración de argumentos para soportar afirmaciones, la consideración de las condiciones del problema y el establecimiento de resultados apoyados en el trabajo realizado y evidencia empírica. En la segunda oportunidad que se observó este episodio Paul cuestionó las razones que llevaban a obtener un rectángulo, sin embargo este episodio no se desarrolló por la interrupción de Caro, quien sugirió otra ruta de trabajo. En dicha oportunidad se observó únicamente un comportamiento asociado al cuestionamiento sobre la validez de alguna propiedad o resultado. En la tercera oportunidad que se manifestó el episodio, este ayudó a descartar una propuesta de construcción elaborada por Paul, por lo cual los comportamientos observados correspondieron a la consideración de las condiciones del problema y el rechazo de propuestas poco afortunadas. En la cuarta oportunidad este episodio nuevamente emergió ante la necesidad de Paul por proveer una explicación a la obtención del rectángulo. En la pasada ocasión que esto ocurrió, Caro lo interrumpió y no dio tránsito a su incertidumbre, pero ahora él provee una posible justificación de este resultado, aunque esta es básica y carente de un respaldo teórico. Los comportamientos observados en esta oportunidad fueron el cuestionamiento de resultados obtenidos, el uso de representaciones gráficas, el acceso a conocimiento relevante y la elaboración de argumentos para soportar alguna afirmación. Las dos últimas oportunidades que se observó este episodio mostraban el proceso de justificación de un resultado que tomó por sorpresa a los estudiantes cuando trabajaron con el trapecio. En este punto se reconocieron comportamientos como el cuestionamiento acerca de los motivos por los cuales una propiedad es válida, la consideración de las condiciones del problema, el acceso a conocimiento relevante, el uso de representaciones gráficas, la elaboración de argumentos para soportar afirmaciones, el establecimiento de resultados apoyados en evidencia empírica, tener presente el objetivo de el plan abordado, expresar en palabras propias lo que debe realizarse, cuestionar la efectividad de alguna estrategia y dividir un problema en otros más pequeños. Lo expresado anteriormente permite manifestar que para este grupo este fue el episodio que mayor cantidad de comportamientos metacognitivos provocó en los estudiantes. En el siguiente capítulo explicaremos los motivos de ello.

Exploración. En tres oportunidades se observó este episodio. La primera ocurrió durante la exploración de posibles propiedades en una configuración de paralelogramo observada en pantalla. En la segunda oportunidad Caro intenta configurar un cuadrado, aun cuando Paul ya le había comentado sobre la imposibilidad de esta situación. En la tercera ocasión se manipularon los vértices del cuadrilátero tratando de obtener una cometa. El primer momento dejó ver comportamientos como la manipulación de objetos geométricos en atención a lo propuesto en el problema y el establecimiento de resultados con base en el trabajo realizado. En la segunda y tercera oportunidad, de naturaleza similar, comportamientos como la clarificación de un plan trazado, el uso de representaciones gráficas, el cuestionamiento de posibles resultados, el establecimiento de resultados, la anticipación de resultados, la consideración de las condiciones del problema, la elaboración de argumentos para soportar afirmaciones y el acceso al conocimiento relevante fueron observados.

Planeación. Fue el episodio de mayor frecuencia, aunque no de mayor duración. A través de estos se propusieron acciones como representar en pantalla lo dado en el problema, determinar las longitudes de lados y medidas de ángulos para estudiar su comportamiento, realizar construcciones auxiliares para analizar relaciones o proponer configuraciones entre estos y transformar el cuadrilátero dado en algunos familiares. En estos episodios se observaron comportamientos como la formulación de estrategias de trabajo, el uso de representaciones gráficas o simbólicas, la sugerencia de que se realicen acciones, el acceso a conocimiento relevante, la clarificación del plan trazado y el cuestionamiento de algunas estrategias propuestas o su pertinencia. Aunque este episodio tuvo una frecuencia superior, respecto a los otros, en muchas ocasiones su aparición se daba apenas para proponer la transformación de la figura en pantalla en un cuadrilátero conocido o el cumplimiento de alguna propiedad, lo que permite explicar también su corta duración a lo largo del proceso.

Implementación. Presente en diez oportunidades, este episodio tuvo presencia siempre que un plan fue trazado, lo que indica que los estudiantes realizaron acciones una vez estas eran presupuestadas y atendían a un objetivo particular. Los comportamientos observados en estos episodios correspondieron al control de las acciones realizadas, la sugerencia de acciones a realizar, la realización de acciones en conformidad a un plan, el uso de representaciones gráficas, la elaboración de argumentos para soportar ideas, el cuestionamiento de la validez de alguna propiedad o la funcionalidad de alguna estrategia adoptada, el acceso a conocimiento relevante, la inclusión de las condiciones del problema, el establecimiento de resultados con base en el trabajo realizado o evidencia empírica, la anticipación de resultados, la revisión de las construcciones realizadas y clarificación del objetivo de un plan o explicación del mismo.

Verificación. Este episodio tuvo presencia en cuatro oportunidades. En la primera ocasión, sobre el inicio del proceso de resolución, se quería verificar si el cuadrilátero en pantalla era un paralelogramo, luego en dos oportunidades en que se quería verificar si era posible determinar un rectángulo y si esta satisfacía las propiedades del mismo. Finalmente, cuando en el proceso de justificación se retoman algunos elementos ya expuestos para tener claridad de los argumentos elaborados. Los comportamientos metacognitivos observados correspondieron al uso de herramientas de GGB para verificar propiedades, el cuestionamiento de las estrategias adoptadas y su funcionalidad, la realización de acciones para verificar o descartar algún resultado, el control de las acciones realizadas y la sugerencia de realizar algunas, el uso de representaciones gráficas, el cuestionamiento de la validez de alguna propiedad, la inclusión de argumentos previamente elaborados, el establecimiento de resultados como fruto del trabajo realizado, el acceso a conocimiento relevante y la consideración de las condiciones del problema.

Síntesis. Su aparición se dio en cinco oportunidades, las primeras de estas relacionadas con la formulación de propiedades que permitieran obtener un trapezoide o paralelogramo. En la tercera oportunidad se reconoce que es posible obtener un rectángulo, aunque no se dan condiciones sobre la forma de lograr ello. En la cuarta oportunidad se logra reconocer que no es posible obtener paralelogramos que sean rombos. En la quinta aparición se establecen los resultados generales del trabajo realizado. Los comportamientos metacognitivos observados en estos episodios corresponden al establecimiento de resultados con base en evidencia empírica o el trabajo realizado, la generalización de resultados apoyados en la experiencia adquirida, el cuestionamiento de la validez de alguna propiedad y la elaboración de argumentos para soportar afirmaciones.

CARACTERIZACIÓN DE JUAN Y ANA

El grupo de Juan y Ana dio respuesta a todos los cuatro problemas propuestos, sin embargo requirió para su desarrollo mucho más tiempo que el grupo de Caro y Paul. Las respuestas dadas por ellos en tres de los cuatro problemas fueron generales y no particulares como ocurrió en el caso de Caro y Paul. Presentamos a continuación un desarrollo de cada problema de la misma forma que se presentó con el anterior grupo.

Problema 1: las bisectrices del cuadrilátero

El primer problema solicitaba que se determinaran las propiedades del cuadrilátero de tal forma que las bisectrices de dos ángulos adyacentes fueran perpendiculares. Puede asegurarse, respecto al proceso de resolución (Tabla 15), que el grupo exhibió mayor cantidad de momentos de planeación, seguida de momentos de análisis e implementación, dadas las frecuencias de estos episodios. Por su parte, los episodios de exploración y comprensión aparecieron apenas en una oportunidad y el de verificación en dos oportunidades. Es en el episodio de análisis que se utiliza la mayor cantidad de tiempo dentro de todo el proceso de resolución, esto correspondió a un 36% aproximadamente. Episodios como la implementación y síntesis requirieron una cantidad de tiempo significativa y casi similar (21% y 20,8% respectivamente). Al contrario, el episodio de comprensión que apenas apareció en una oportunidad, tiene una duración relativa casi nula y otros como el de lectura y verificación tienen una extensión igualmente baja.

Episodios	Tiempo	Porcentaje

Lectura	3	81	2,8
Comprensión	1	4	0,1
Análisis	5	1033	36,2
Exploración	1	219	7,7
Planeación	8	191	6,7
Implementación	5	598	21,0
Verificación	2	132	4,6
Síntesis	3	594	20,8

Tabla 15. Distribución de tiempo y episodios problema 1

El proceso de resolución llevado a cabo por este grupo (Figura 11) muestra un momento inicial de lectura y una primera aproximación para abordar el problema, en el que se planean acciones, estas se ejecutan y se da un significado a lo que se solicita hacer. En lo que sigue se observa una interacción entre acciones de planeación e implementación que llevan a obtener un primer resultado como respuesta al problema a través de un episodio de síntesis. Sin embargo, la duda de uno de los estudiantes, respecto a la generalidad de la propiedad encontrada, los lleva a realizar acciones relativas a distintos episodios, a través de las cuales se pone a prueba la propiedad encontrada en otras configuraciones distintas a las ya analizadas. Este ejercicio los llevó a establecer una propiedad general, a discutir sobre su estructura condicional, a leer el anunciado para reconocer lo que se debía hacer ahora y a proveer una justificación a la misma en un momento posterior. Durante el proceso de justificación se observaron distintos episodios, dado que la justificación de la conjetura requirió que se modificara la representación hecha en la pantalla de GGB con el fin de poder utilizar una estrategia de justificación que en un dibujo hecho en papel se había formulado. Durante todo el proceso de resolución no fue posible reconocer algún patrón de comportamiento, dado que, a diferencia del proceso realizado por Caro y Paul al resolver este problema, en esta oportunidad el trabajo no se apoyó en la evaluación de casos particulares.

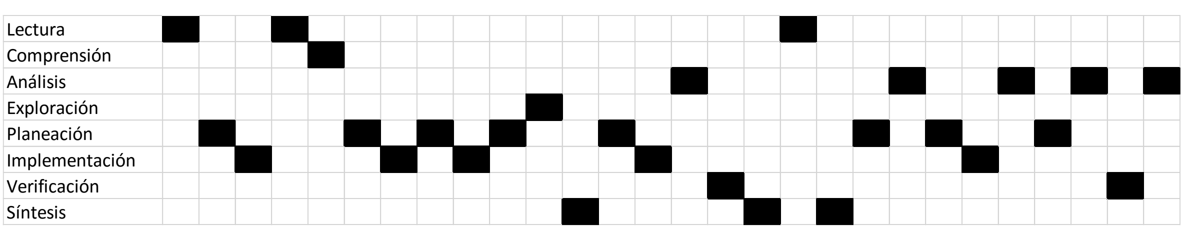


Figura 11. Episodios resolución del problema 1 a cargo de Ana y Juan

Este grupo no presentó problemas en el desarrollo del problema, de hecho, logró descubrir una propiedad general en los cuadriláteros que satisface lo que el problema proponía, caso distinto a lo que el grupo de Paul y Caro reportó. Sin embargo, al final del proceso desarrollado se encontraron en un momento de incertidumbre generado por la dicotomía al haber trabajado una representación en papel y otra en GGB, donde la primera permitía establecer una ruta de justificación que no era fácilmente reproducible en la segunda representación. Afortunadamente la forma de dar respuesta a este problema fue propuesta por Ana y con ello lograron finalizar el proceso de resolución.

Comportamientos metacognitivos evidenciados

Lectura. Presente en tres oportunidades a lo largo del proceso realizado y con una duración relativamente baja. En un primer momento se realizó la lectura del enunciado, en la segunda oportunidad se revisó nuevamente este para ver que se debía realizar y en la tercera ocasión se revisa este una vez se ha formulado una conjetura. En la primera oportunidad se reconocieron comportamientos metacognitivos como hacer énfasis en las condiciones del problema y reflexionar sobre lo que este solicita. En las dos últimas ocasiones, de naturaleza similar, se observaron comportamientos como la lectura de partes relevantes del problema y la lectura mental del mismo, la cual permite considerar que conlleva a un ejercicio de comprensión de lo que debe hacerse.

Comprensión. Este episodio solo se observó en una oportunidad y con una duración muy corta. En este los estudiantes realizaron una acción metacognitiva correspondiente a la generación de significado de la información dada en el problema. Presumiblemente esto fue suficiente si se tiene en cuenta el proceso de resolución desarrollado y el resultado obtenido del mismo.

Análisis. Este episodio, el cual tuvo presencia en cinco oportunidades, fue el que mayor prolongación exhibió. En el marco de este episodio se analizó la generalidad de la propiedad descubierta, se dio una primera aproximación a la justificación de la conjetura formulada, se discute sobre la forma de replicar la justificación hecha en la representación hecha en papel en la que se tiene en pantalla y esta se procede a justificar de acuerdo a algunos acuerdos. Los comportamientos metacognitivos observados en el primer momento correspondieron al establecimiento de resultados con base en el trabajo realizado. En los episodios referidos a la justificación de la conjetura los comportamientos observados correspondieron al uso de representaciones gráficas, el reconocimiento y búsqueda de relaciones y conocimiento relevantes, la formulación de rutas de justificación y la elaboración y cuestionamiento de las mismas, el cuestionamiento de la pertinencia de las acciones realizadas, el uso de representaciones gráficas, la anticipación de resultados y el reconocimiento de dificultades.

Exploración. Este episodio solo tuvo presencia en una oportunidad, aunque su duración no fue tan baja como la del episodio de comprensión. En este episodio, después de representar gráficamente lo que el problema proponía y realizar una lectura del enunciado para ver lo que seguía, se dio significado a la información provista por este antes de proceder. Se observaron comportamientos metacognitivos como la realización de acciones en correspondencia a algún plan y el cuestionamiento de las mismas, la anticipación de resultados, el apoyo de resultados en evidencia empírica y el uso de representaciones gráficas o simbólicas.

Planeación. Este fue el episodio de mayor frecuencia en todo el proceso de resolución, aunque la duración del mismo es muy corta. A través de este episodio se propusieron las construcciones de las bisectrices perpendiculares y el cuadrilátero generado por estas, la construcción del cuadrilátero genérico, sus bisectrices y la manipulación del mismo para que estas fueran perpendiculares, la verificación de una posible propiedad en otro par de ángulos adyacentes y las acciones enmarcadas en el proceso de justificación una vez se formula la conjetura. Durante el proceso de construcción se observaron comportamientos metacognitivos como la formulación de un plan, la clarificación del mismo y la consideración de los que se solicita el problema. En los episodios de planeación relativos a la justificación, comportamientos como la formulación de un plan y el señalamiento de la generalidad de una justificación fueron observados. La corta duración de estos episodios se dio por porque su estructura reflejaba principalmente la propuesta de alguna construcción o procedimiento.

Implementación. Este episodio tuvo presencia apena en cinco oportunidades, todas inmediatamente después de un episodio de planeación. Lo anterior permite asegurar que este grupo realizó procedimientos posteriores a haber planificado los mismos. Los comportamientos metacognitivos observados en estos episodios correspondieron a la realización de acciones en correspondencia a algún plan, el uso de representaciones gráficas, la clarificación del plan abordado, el control y cuestionamiento de las acciones realizadas, la consideración de las condiciones del problema, la anticipación de resultados y el apoyo de resultados en evidencia empírica.

Verificación. Este episodio solo se manifestó en dos oportunidades, una en la que se involucró el paralelogramo para verificar el cumplimiento de una propiedad y otra durante la justificación de la conjetura, en la que se retomaron argumentos para tener claridad de lo que se estaba realizando. Los comportamientos metacognitivos exhibidos por el grupo en el primer momento fueron la puesta a prueba de una conjetura, el uso de representaciones gráficas, la realización de acciones en correspondencia a un plan trazado, el control de las acciones realizadas, la anticipación de resultados, el establecimiento de resultados con base en el trabajo realizado, la explicación de los resultados obtenidos y la generalización de resultados obtenidos. En el segundo momento solo se reconoció un comportamiento asociado a la revisión de una justificación realizada previamente.

Síntesis. Este episodio solamente se manifestó en tres oportunidades. En la primera y segunda oportunidad se estableció una propiedad para el trapecio gracias a la verificación de algunas hipótesis. En la tercera oportunidad se dio paso a la formulación de una conjetura, momento en el que se dio una discusión sobre la forma en que debería reportarse la misma. En los primeros episodios se identificaron comportamientos como el establecimiento de resultados con base en el trabajo realizado, el cuestionamiento de algunos resultados y el establecimiento de relaciones entre los datos dados en el problema y la información descubierta, el uso de representaciones gráficas, la explicación de resultados obtenidos y la generalización de resultados. En la tercera oportunidad que se observó este episodio se observaron comportamientos como la formulación de una conjetura, el uso de representaciones gráficas, el cuestionamiento del progreso realizado o resultado obtenido, la generalización de resultados, la anticipación de resultados, el establecimiento de resultados con base en el trabajo realizado, el control de las acciones realizadas y la revisión de los resultados obtenidos.

Problema 2: los triángulos separables

Recordemos que el segundo problema proponía determinar las condiciones del triángulo ABC y el punto P en el segmento AB que se debían cumplir para que los triángulos APC y PCB fueran isósceles. A diferencia del grupo de Caro y Paul, este grupo proveyó una respuesta al problema, sin embargo esta no fue expresada en términos generales y se limitó a reportar un caso particular en el que las los triángulos en mención satisfacen lo solicitado. En el proceso de resolución (Tabla 16) se observó la presencia considerablemente alta de episodios de planeación e implementación, mientras que episodios de verificación, síntesis, comprensión y análisis presentaron una frecuenta no muy alta y algunos casi nula. En términos del tiempo involucrado en cada episodio, los episodios de implementación y exploración demandaron mayor tiempo y juntos abarcaron un poco más de la mitad del tiempo total del proceso de resolución. Por su parte, los episodios de comprensión y verificación fueron aquellos con menor extensión de tiempo.

	Episodios	Tiempo	Porcentaje
Lectura	8	193	6,5
Comprensión	3	112	3,8
Análisis	3	434	14,6
Exploración	4	758	25,5
Planeación	15	239	8,0
Implementación	12	833	28,0
Verificación	2	120	4,0
Síntesis	1	281	9,5

Tabla 16. Distribución de tiempo y episodios problema 2

El proceso de resolución desarrollado por el grupo (Figura 12) permite reconocer un patrón en el que distintos bloques de episodios tienen inicio y final gracias a un episodio de lectura, esto significa que el ejercicio de revisar el enunciado del problema llevaba a los estudiantes a tomar caminos de trabajo o modificar los mismos y cuando estos se realizaban o se llegaba a un momento de incertidumbre, se retomaba el enunciado para orientar las acciones realizadas. En cada uno de los bloques determinados por episodios de lectura se pueden reconocer ejercicios de planeación e implementación como mínimo, lo que significa que, en cada uno de estos bloques las acciones realizadas eran planificadas, previo a su ejecución. En algunas oportunidades estos bloques contaban además con la presencia de otros episodios como la comprensión, análisis y exploración, de acuerdo a las particularidades de cada bloque. Sin embargo, llama la atención que en ninguno de estos bloques se observó alguna acción dirigida a verificar o sintetizar el trabajo realizado y los descubrimientos hechos. Estos episodios solamente aparecen al final del proceso de resolución.

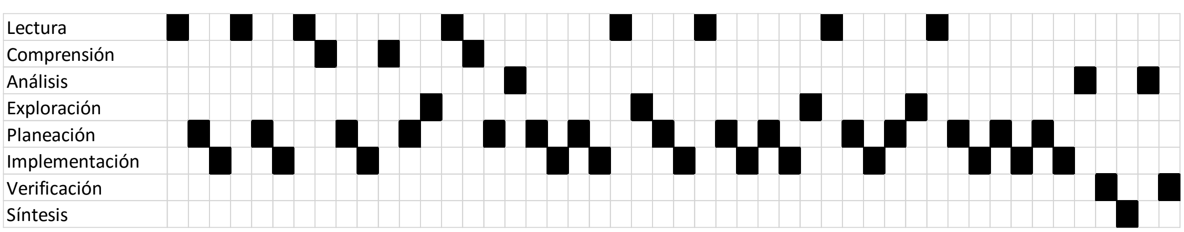


Figura 12. Episodios resolución del problema 2 a cargo de Ana y Juan

Comportamientos metacognitivos evidenciados

Lectura. Este episodio se manifestó en ocho oportunidades. Las acciones presentes en este episodio condujeron a reconocer lo que el problema solicitaba y las condiciones del mismo, en particular, el hecho de que ambos triángulos debían ser isósceles. En otras oportunidades que se presentó este episodio las acciones realizadas se relacionaron con la revisión de lo que se solicitaba, esto para ver que no se omitieran detalles o información relevante. Los comportamientos metacognitivos observados en estos episodios fueron principalmente la lectura progresiva del enunciado del problema, la revisión de la información suministrada, la lectura mental del enunciado para comprender lo que este presentaba y la comparación de lo realizado en GGB con respecto a lo solicitado por el problema. Un resultado muy importante de estos episodios fue el reconocimiento de que ambos triángulos debían cumplir con la propiedad, asunto que llevó de entrada a descartar una solución como la propuesta por Caro y Paul.

Comprensión. Aunque solo se observó en tres oportunidades este episodio, las acciones realizadas en cada uno permitieron que se comprendiera la necesidad de que ambos triángulos fueran isósceles pero que cualquier pareja de lados en cada uno podía ser congruente, aspecto que permitiría trazar muchas formas de trabajo y exploración. Los comportamientos metacognitivos observados en estos episodios correspondieron a la clarificación e interpretación de las condiciones del problema e información suministrada por este y la anticipación de resultados.

Análisis. Este episodio se manifestó en tres oportunidades. A través del mismo se reconocieron posibilidades alternas para la obtención del resultado deseado como lo fue el trabajo con los ángulos opuestos a los lados de los triángulos, también se brindó una justificación a la conjetura formulada y un análisis sobre la pertinencia de las condiciones de la misma, con el ánimo de tener seguridad de que lo reportado era correcto. Los comportamientos metacognitivos identificados en estos episodios correspondieron a la anticipación de resultados, la sugerencia de que se realizaran acciones, el uso de representaciones gráficas, la elaboración y cuestionamiento de justificaciones para soportar afirmaciones, el cuestionamiento de los resultados obtenidos y las acciones realizadas, el acceso a conocimiento relevante y condiciones del problema y el reconocimiento de múltiples formas de proveer una justificación.

Exploración. Este episodio tuvo presencia en cuatro oportunidades, en las cuales se arrastraron los vértices del triángulo con el fin de buscar configuraciones en las que se determinaran triángulos isósceles, aunque estas no fueran exitosas. En estos episodios se observaron comportamientos metacognitivos como la búsqueda de información relevante, la sugerencia de que se realicen acciones, la formulación de resultados apoyados en evidencia empírica, la anticipación de resultados, la clarificación del objetivo de un plan, la manipulación de objetos geométricos y la justificación de algunos resultados parciales observados.

Planeación. Presente en quince oportunidades a lo largo del proceso de resolución. Este episodio presentó acciones de planeación de diversa naturaleza, unas dirigidas a la representación de la información suministrada en el problema, otras dirigidas a la forma de manipular y transformar la información y otras dirigidas a la forma de proceder para resolver el problema. Los comportamientos metacognitivos observados fueron principalmente la formulación de un plan y su posible modificación, la clarificación y justificación de los objetivos de un plan, la propuesta de realizar determinadas acciones y el acceso a conocimiento relevante para justificar resultados.

Implementación. En las doce oportunidades que este episodio de observó, el mismo provenía de un ejercicio de planeación previo. Esto significa que a través de este episodio se materializaron las ideas contempladas o planeadas en un momento inicial, así en algunos casos los resultados obtenidos no correspondieran a los deseados. Igualmente, a través de este episodio se reconocieron nuevas formas de trabajo que permitieron modificar el plan propuesto inicialmente, retomar la lectura del enunciado para tener claridad sobre algunos aspectos o formular resultados generales. Los comportamientos metacognitivos observados en este episodio fueron principalmente la realización de acciones en conformidad a un plan, el uso de representaciones gráficas, la clarificación del objetivo de un plan seguido, la anticipación de resultados, el cuestionamiento de resultados obtenidos o acciones realizadas, la formulación de resultados con base en la evidencia empírica, la justificación de algunos resultados obtenidos, la manipulación de los objetos geométricos y el acceso a conocimiento relevante.

Verificación. Este episodio se manifestó en dos oportunidades sobre el final del proceso de resolución. En estos momentos se realizaron acciones encaminadas a la verificación de una propiedad, apoyados en otros ejemplos, que potencialmente podría ser verdadera y la revisión y explicación de un fragmento de la justificación que se había elaborado. Los comportamientos metacognitivos observados en estos episodios fueron la manipulación de los objetos geométricos, el establecimiento de resultados con base en el trabajo realizado, la comparación de resultados e hipótesis, el cuestionamiento de las acciones realizadas y el soporte de ideas en argumentos previamente elaborados.

Síntesis. Solo se evidenció este episodio en una oportunidad, en la cual, después de verificar el cumplimiento de una propiedad apoyados en otros casos, se procede a formular una conjetura que recogía lo descubierto. Los comportamientos metacognitivos observados en este episodio correspondieron al establecimiento de resultados apoyados en las experiencias adquiridas, el control de las acciones realizadas y el cuestionamiento de las mismas, el acceso a conocimiento relevante, el cuestionamiento de los resultados obtenidos y la utilización de la información dada en el problema.

Problema 3: los puntos medios del cuadrilátero

El tercer problema proponía determinar las propiedades del cuadrilátero que hacían que el cuadrilátero determinado por sus puntos medios fuera rectángulo. El proceso de resolución (Tabla 17) permite observar una notable presencia de episodios de planeación e implementación y una muy baja presencia de episodios de lectura, análisis, comprensión, exploración y síntesis. Sin embargo, en términos del tiempo involucrado para el desarrollo de cada episodio, se observa que el episodio de implementación requirió un 35% del tiempo total, siendo junto al episodio de análisis, con un 31% aproximadamente, los que mayor tiempo requirieron durante todo el proceso de resolución. Por otro lado, los episodios de lectura y síntesis son los que menos tiempo requirieron en todo el proceso. Esto lleva a decir que el episodio de análisis, aun cuando solo presente en dos oportunidades, requirió una alta cantidad de tiempo para su desarrollo y que el episodio de planeación, aunque siendo el más frecuente, requirió un tiempo mínimo para su ejecución.

	Episodios	Tiempo	Porcentaje
Lectura	2	51	1,8
Comprensión	2	141	4,9
Análisis	2	906	31,3
Exploración	2	226	7,8
Planeación	11	141	4,9
Implementación	9	1012	35,0
Verificación	4	307	10,6
Síntesis	1	107	3,7

Tabla 17. Distribución de tiempo y episodios problema 3

En el proceso de resolución (Figura 13) se puede señalar un momento inicial de lectura y comprensión, seguido de una interacción continua entre episodios de implementación y planeación, en las que, en algunas oportunidades, muy distantes además, se presentaban episodios de exploración o verificación. En una única oportunidad, casi sobre la mitad del proceso realizado, aparece un episodio de análisis, en el que se estudia, con algo de incertidumbre, la necesidad de contar con otra propiedad que permita caracterizar la propiedad de los cuadriláteros que conlleve a obtener el resultado propuesto a través del problema, pues hasta ese momento no se había logrado encontrar una común a los ejemplos con los que contaban. Sobre el final del proceso se evidencia un nuevo episodio de lectura y comprensión en los que se espera identificar información que ayude a aliviar la confusión por la que los estudiantes están pasando. Como resultado de este proceso se propone una posibilidad y esta se verifica, llevando a sintetizar la información obtenida a través de una conjetura que posteriormente se justifica en un episodio de análisis.

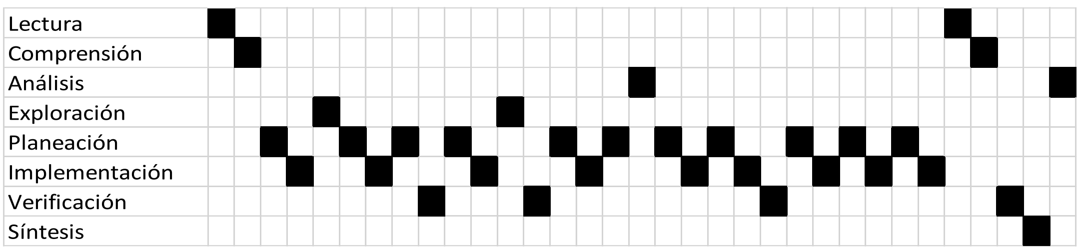


Figura 13. Episodios resolución del problema 3 a cargo de Ana y Juan

El trabajo realizado por el grupo los llevó a formular una conjetura general, muy pertinente y en correspondencia a un trabajo de exploración muy cuidadoso, lejano del trabajo apoyado en casos particulares, como el reportado por Caro y Paul en este mismo problema.

Comportamientos metacognitivos evidenciados

Lectura. En las dos oportunidades que este episodio se presentó en todo el proceso de resolución se realizaron acciones dirigidas a reconocer el enunciado del problema y lo que este involucraba, así como la revisión del mismo con el fin de tener claridad sobre esto último. Únicamente se reconoció un comportamiento metacognitivo en este episodio el cual correspondió a la lectura mental del problema para comprender lo solicitado.

Comprensión. Las dos ocasiones en que este episodio se observó, un episodio de lectura antecedía al mismo. En el marco de este episodio se representó gráficamente lo que el problema proponía, con el fin de tener una imagen de lo las condiciones involucradas y posteriormente, en otro momento, se reformuló el problema en palabras propias, con el fin de entender lo que debía realizarse. Los comportamientos metacognitivos observados correspondieron a reformular el problema en palabras propias, establecer resultados con base en el trabajo realizado, acceder a conocimiento relevante, anticipar resultados y representar gráficamente la información del problema.

Análisis. Episodio presente también en dos oportunidades a lo largo del proceso de resolución. En el marco de este episodio se realizaron acciones que favorecieran el reconocimiento de una propiedad general en los cuadriláteros que implicara la obtención de un rectángulo y otras encaminadas a proveer una justificación de la conjetura formulada. Los comportamientos metacognitivos observados correspondieron al establecimiento de resultados apoyados en el trabajo realizado o evidencia empírica, la manipulación de los objetos geométricos, el uso de representaciones gráficas, el acceso a conocimiento relevante, la descomposición de un problema en otros más pequeños, el cuestionamiento de alguna idea o su clarificación, la formulación o elaboración de una ruta de justificación para soportar alguna idea, la inclusión de las condiciones del problema y el cuestionamiento de los resultados obtenidos.

Exploración. En las dos oportunidades que este episodio se presentó se realizaron acciones encaminadas a manipular los objetos geométricos buscando alguna configuración que se ajustara a lo solicitado. Los comportamientos metacognitivos observados en este episodio se corresponden con la manipulación de objetos geométricos, la realización de acciones en correspondencia a un plan, la anticipación de resultados, el establecimiento de resultados apoyados en evidencia empírica, el uso de representaciones gráficas, el acceso a conocimiento relevante y la sugerencia de que se realicen algunas acciones.

Planeación. Este fue el episodio de mayor frecuencia, pero uno de los que tuvo menor duración. En las once oportunidades que se observó este episodio se realizaron acciones encaminadas a la representación de las condiciones del problema, la transformación o manipulación de los objetos geométricos, el uso de valores numéricos como apoyo de exploración y la verificación en casos particulares del cumplimiento de alguna propiedad. En estos episodios se pudieron observar comportamientos relacionados a la formulación de un plan, el cuestionamiento de los resultados obtenidos o ideas propuestas, la incorporación de las condiciones del problema, el establecimiento de resultados apoyados en el trabajo realizado, la consideración de acciones que podrían realizarse y la clarificación del objetivo de un plan.

Implementación. Este episodio tuvo presencia en nueve oportunidades, todas inmediatamente después de que un episodio de planeación tenía lugar. Lo que significa que las acciones ejecutadas en el marco de este episodio atendieron a los planes y propuestas de trabajo formuladas en un momento previo, aunque algunos de los episodios de planeación condujeron a episodios de verificación o análisis. Los comportamientos identificados en este episodio fueron la realización de acciones en correspondencia con un plan, el control de las acciones realizadas, la formulación de acciones que deberían realizarse, el uso de representaciones gráficas, la clarificación de los objetivos de un plan y las acciones a realizar, la modificación de representaciones geométricas, la incorporación de las condiciones del problema, el acceso a conocimiento relevante, el establecimiento de resultados apoyado en evidencia empírica, la anticipación de resultados y el cuestionamiento de ideas.

Verificación. Se presentaron cuatro episodios de verificación en todo el proceso de resolución observado, cuyas acciones inmersas atendían a verificar si un cuadrilátero en el que se satisfacía la propiedad se cumplía alguna relación que permitiera caracterizarlo en términos de figuras conocidas o si un cuadrilátero conocido podría llegar a ser un ejemplo de figura en la que se cumplía la condición. Los comportamientos metacognitivos observados corresponden al cuestionamiento de los resultados obtenidos, la manipulación de objetos geométricos y el uso de representaciones gráficas, la verificación del cumplimiento de alguna propiedad, el establecimiento de resultados apoyados en evidencia empírica, la revisión de los resultados y el control de las acciones realizadas.

Síntesis. Este episodio solo se evidenció en una oportunidad, en la que se formula la conjetura después de verificar el cumplimiento de una propiedad. Los comportamientos metacognitivos observados correspondieron al establecimiento de resultados con base en el trabajo realizado, el control de las acciones realizadas y la revisión de las conjeturas formuladas.

Problema 4: la búsqueda de cuadriláteros

El último problema propuesto colocaba una construcción sobre la que se debía indagar qué tipos de cuadriláteros eran posibles obtener. En el desarrollo del problema (Tabla 18) se puede apreciar que los episodios de análisis, planeación e implementación tienen mayor participación, mientras que los episodios de síntesis y verificación aparecen muy pocas veces. Esto lleva a decir que en el trabajo realizado los estudiantes se comprometieron con acciones orientadas a la interpretación y transformación de la información suministrada, a la vez que realizaban propuestas de trabajo y estas se ejecutaban. Por otro lado, se puede apreciar que el episodio de análisis demanda una cantidad de tiempo realmente alta con respecto a los otros episodios en todo el proceso de resolución. El tiempo que este episodio demandó corresponde al 60% de todo el tiempo de resolución empleado y muestra una gran diferencia con respecto a otros episodios como planeación, comprensión y verificación, los cuales no superaron ni siquiera el 4% dentro del tiempo empleado para dar solución al problema. Aun cuando la planeación se manifestó en tantas oportunidades como episodio, la duración del mismo fue muy baja, lo que lleva a anticipar que el tipo de comportamientos y acciones inmersas en este episodio se limitaron a proponer un plan, sin una mayor reflexión sobre su impacto. El hecho de que el episodio de análisis tuviera una mayor presencia que el de verificación permite señalar que en esta oportunidad los estudiantes no tuvieron mayores problemas en la comprensión de lo que se solicitaba pero que sí tuvieron que enfrentar una situación compleja, sobre la que distintos tipos de esfuerzos cognitivos o metacognitivos tuvieron que realizarse con el fin de avanzar en la resolución del problema.

	Episodios	Tiempo	Porcentaje
Lectura	8	515	10,2
Comprensión	5	192	3,8
Análisis	10	3018	59,7
Exploración	4	431	8,5
Planeación	11	128	2,5
Implementación	7	328	6,5
Verificación	2	145	2,9
Síntesis	1	302	6,0

Tabla 18. Distribución de tiempo y episodios problema 4

El proceso de resolución (Figura 14) permite reconocer una trayectoria en un primer momento dispersa, con respecto a lo presentado en el tercer problema. Aun así, una mirada más detallada del proceso desarrollado permite reconocer bloques de episodios que tienen inicio y final en los episodios de lectura. En un primer momento, el episodio de lectura lleva a representar gráficamente las condiciones dadas en el problema. En un segundo momento se realiza un ejercicio de comprensión sobre lo que solicita hacer, pues al parecer hay dudas sobre ello. Posteriormente, se presenta un bloque en el que se plantean algunas aproximaciones de resolución iniciales que no conducen a un resultado favorable. Un cuarto bloque presenta otras aproximaciones para determinar alguna propiedad, algunas de las cuales permiten formular propiedades en casos particulares y tras su rechazo por su carácter no general, se encuentra una propiedad que parece conducir a la obtención de un paralelogramo. Sin embargo, esta no es aceptada por Juan, quien considera que no corresponde con el proceso de construcción. En un quinto momento Juan trata de buscar alguna propiedad sin éxito alguno y Ana trae a discusión su idea, aunque esta no es compartida por Juan. En el siguiente bloque Juan descubre algunas relaciones de congruencia y tras de verificar el cumplimiento de las mismas, procede a formular una conjetura que lleva a obtener el paralelogramo. En el siguiente bloque se explora la posibilidad de obtener un trapecio o cometa, aunque ninguno de estos es susceptible de obtener. En el bloque final se proceden a justificar las conjeturas formuladas.

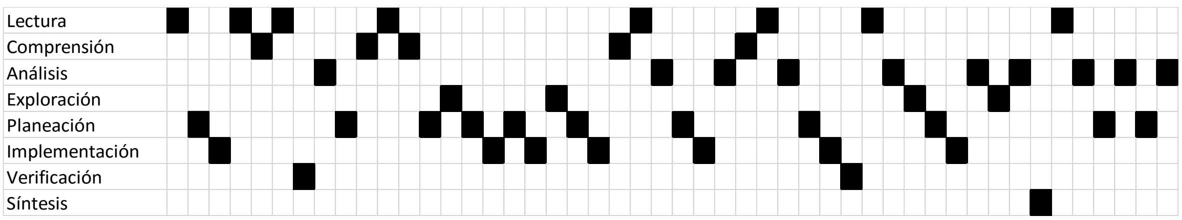


Figura 14. Episodios resolución del problema 4 a cargo de Ana y Juan

Aunque el grupo pudo resolver el problema, este se enfrentó a momentos de incertidumbre, originados principalmente por el intento de justificar una conjetura sobre la que no tenían elementos teóricos para comprobar su validez. Igualmente, si bien es cierto que la propiedad reportada en la conjetura que justificaron era válida, se debe reconocer que desde muy temprano Ana propuso una propiedad que permitía alcanzar el mismo resultado y que era equivalente con la propiedad formulada al final. Esto lleva a mencionar que se gastó mucho tiempo en la búsqueda de una propiedad que resolviera el problema, aun cuando ya se contaba con una que satisfacía lo solicitado.

Comportamientos metacognitivos evidenciados

Lectura. Este episodio se presentó en ocho oportunidades y como ya se mencionó, en este problema actuó como punto de referencia para dar inicio a un conjunto de acciones con objetivos particulares en cada aparición que tenía, las cuales permitieron avanzar en la formulación de una conjetura y la justificación de la misma. En estos episodios se realizaron acciones afines a la lectura del enunciado, tanto para conocer lo solicitado, como para revisar el contenido del enunciado y no dejar escapar algún detalle o tener seguridad de lo que allí se solicitaba. Los comportamientos metacognitivos observados en este episodio fueron la representación de la información dada en el problema y el énfasis en lo que el problema solicita.

Comprensión. Este episodio se manifestó en cinco oportunidades, en la que tenía presencia antes o después de un episodio de lectura. A través de este episodio se realizaron acciones encaminadas a comprender lo que debía realizar y aprobar o rechazar estrategias dado el contexto del problema y las condiciones que este involucraba. Los comportamientos metacognitivos identificados en este episodio correspondieron a dotar de significado lo solicitado por el problema, involucrar las condiciones del problema, anticipar resultados, clarificar alguna idea y proponer un plan.

Análisis. Uno de los dos episodios de mayor presencia en el proceso estudiado. Durante el desarrollo de estos episodios, se realizaron acciones encaminadas a considerar distintas configuraciones sobre las que se podría obtener información y estudiar en estas las relaciones inmersas, avanzando así hacia el reconocimiento de propiedades. También se reconocieron acciones dirigidas a la formulación de justificaciones. Los comportamientos metacognitivos observados en estos episodios se relacionan con la anticipación de resultados, la corroboración de alguna propiedad, la manipulación de objetos geométricos, el establecimiento de resultados con base en evidencia empírica, el acceso a conocimiento e información relevante, la revisión de las construcciones realizadas, el cuestionamiento de resultados o ideas formuladas, la justificación de afirmaciones, el uso de representaciones gráficas, la división de un problema en otros más pequeños, la formulación de una ruta de justificación, la clarificación del objetivo de alguna estrategia y el reconocimiento de la insuficiencia de la información.

Exploración. Solo se observaron cuatro oportunidades en las que este episodio se presentó. Las acciones que se realizaron en el marco de este episodio correspondieron a la manipulación de los objetos geométricos en atención a algún objetivo, con miras a descubrir relaciones o propiedades. Los comportamientos metacognitivos observados en este episodio correspondieron al uso de representaciones gráficas, la manipulación de objetos geométricos, la formulación de un plan, la revisión de las construcciones realizadas, el cuestionamiento de ideas o resultados, la inclusión de las condiciones del problema, el establecimiento o cuestionamiento de resultados apoyados en evidencia empírica, la identificación de información relevante y la anticipación de resultados.

Planeación. Este episodio se manifestó en once oportunidades y las acciones realizadas en el marco del mismo atendieron a la formulación de propuestas para representar la información del problema, manipular los objetos geométricos en pantalla, verificar el cumplimiento de propiedades y proceder en momentos posteriores del proceso. Los comportamientos metacognitivos observados fueron la formulación de una propuesta de trabajo, la discusión respecto a la pertinencia de algún plan, la anticipación de resultados y cuestionamiento de los resultados obtenidos.

Implementación. Este episodio se manifestó en siete oportunidades, todas después de que se realizara un ejercicio de planeación. Lo que permite asegurar que las acciones implementadas estuvieron siempre enmarcadas en una propuesta o plan de trabajo. Los comportamientos metacognitivos observados en este punto correspondieron al uso de representaciones gráficas, el control de las acciones realizadas, el acceso a conocimiento relevante, el uso de las condiciones del problema, la realización de acciones en correspondencia a un plan, la manipulación de objetos geométricos en pantalla, la clarificación del objetivo de alguna estrategia y el establecimiento de resultados apoyados en evidencia empírica.

Verificación. Este episodio se presentó en dos oportunidades. A través del mismo se contemplaron acciones orientadas a verificar hipótesis que en algún momento durante el trabajo emergieron. Los comportamientos metacognitivos observados correspondieron a la formulación de un plan, la realización de acciones en correspondencia a un plan, la manipulación de objetos geométricos, el acceso al conocimiento relevante, el establecimiento de resultados con base en el trabajo realizado y la corroboración de alguna propiedad.

Síntesis. Este episodio solamente se manifestó en una oportunidad, cuando se formulan dos conjeturas que recogen el trabajo realizado. En esta se reconocen comportamientos como el establecimiento de resultados con base en el trabajo realizado, el cuestionamiento de alguna propiedad o resultado, la clarificación de alguna idea, el control de las acciones realizadas y el uso de las condiciones del problema.

DISCUSIÓN

En el anterior capítulo se presentó un análisis de los grupos en función del proceso de resolución propuesto en cada problema (intra-grupal). Esto permitió reconocer los episodios más recurrentes en sus actuaciones, los comportamientos metacognitivos presentes en cada uno de estos y las implicaciones de la interacción que se sostuvo al afrontar cada problema. En este capítulo presentamos un análisis inter-grupal, en el que realizamos un cuadro comparativo entre el trabajo realizado por cada grupo, analizamos la presencia e incidencia de la metacognición social en el proceso de resolución y estudiamos la forma en que la GD, como recurso promotor de metacognición ambiental, se involucró dentro del proceso de resolución en cada problema, así como sus bondades y problemáticas observadas.

ACERCA DEL COMPROMISO DE LOS GRUPOS

En este apartado presentamos un análisis comparativo sobre el proceso de resolución llevado a cabo por ambos grupos, considerando particularmente los episodios observados, su frecuencia de aparición y la duración de los mismos a lo largo de cada problema propuesto.

Algunas similitudes entre los grupos

El trabajo realizado por los grupos a lo largo el proceso de resolución deja ver algunos aspectos comunes en sus formas de abordar el problema, los cuales presentamos en lo que sigue. Respecto a la frecuencia de episodios en los procesos de resolución puede evidenciarse que en ambos grupos hay una alta presencia de acciones encaminadas a planear estrategias de solución e implementar estas inmediatamente después de haberlas proyectado. Aun así, los episodios de implementación son menores en cantidad respecto a los de planeación, aspecto dado por la diversidad de acciones que pueden darse una vez se planea alguna acción. Por ejemplo, en algunos casos, una vez se proponían planes de acción en el trabajo realizado por los grupos, estos eran interrumpidos e incluso ignorados, lo que impedía su implementación. En otras oportunidades el ejercicio de planeación llevaba a acciones de exploración o verificación, lo cual brinda otro motivo a este resultado.

Otro aspecto común es la baja presencia de episodios de síntesis. Recordemos que estos episodios tuvieron presencia en los momentos en que se formulaban resultados que atendían al trabajo realizado, por lo general cuando sus acciones de exploración, implementación y verificación los llevaban a formular resultados provisionales bajo una estructura condicional. También se evidenció este episodio cuando se daba fin al trabajo enfocado a la exploración o descubrimiento de propiedades, en este punto se formulaban conjeturas que posteriormente se sometían a análisis para proveer una justificación de las mismas. Esto último guarda relación con lo propuesto por Özen y Köse (2013) en la consideración que hacen del proceso de resolución de problemas mediado por geometría dinámica. Esto no es problemático, de hecho puede considerarse que por la naturaleza del episodio, este solo acontece cuando se establecen conjeturas parcialmente (a medida que se descubre información nueva) o en un momento especifico que da fin a la etapa de descubrimiento (cuando se resume el trabajo realizado).

Los episodios de verificación no reportaron tampoco una alta frecuencia. Principalmente en ambos grupos se observó que los episodios de verificación aparecieron cuando se ponía a prueba alguna hipótesis y esta se validaba o descartaba. Sin embargo, dada la naturaleza del ambiente computacional en el que se encontraban los estudiantes, las acciones de verificación no estuvieron encaminadas a realizar construcciones robustas de los objetos y relaciones geométricas que se descubrían, o bien para tener certeza de que alguna propiedad realmente se satisfacía (aspecto dado por la precisión de los valores numéricos dados en pantalla) o para utilizar estas construcciones como objeto dinámico sobre el que se podía poner a prueba el cumplimiento de alguna propiedad. Respecto a esta última idea, llama la atención el hecho de que los estudiantes, aun utilizando geometría dinámica, validaban una propiedad, por lo general, cuando apenas en un ejemplo genérico esta se satisfacía, pero no arrastraban los puntos que determinan la figura representada para verificar el cumplimiento de la propiedad gracias a la animación y retroalimentación que el software provee. Esta situación es particular si consideramos las ideas de Oner (2013, citando a Laborde, 2004), quien señala la relación presente entre aspectos teóricos y gráfico-espaciales en la geometría dinámica, pues la aproximación al campo teórico tiene lugar a través de la interacción con el software y la visualización de un comportamiento en distintos momentos, generados por ejemplo por el arrastre, pero en esta oportunidad los grupo establecieron resultados a partir del cumplimiento en un único caso considerado. Los estudiantes utilizaron el arrastre principalmente para transformar una figura en pantalla y ajustarla a sus necesidades (obtener alguna figura en particular) o ver si realmente nunca se satisfacía alguna propiedad.

Aspectos distintivos entre los grupos

Uno observación a los diagramas 3 y 4 permitiría ver un comportamiento similar en ambos grupos en términos de las frecuencias y recurrencia de cada episodio a lo largo de los cuatro problemas abordados. Esto significa que algunos episodios son más recurrentes en ambos grupos al abordar este tipo de problemas y que otros tienen, de manera comunal, una frecuencia baja. Sin embargo, debe notarse que algunos aspectos fueron distintos en el trabajo realizado por ambos grupos, principalmente en los cuatro primeros episodios presentados en estos diagramas. Respecto a los episodios de lectura y comprensión debe mencionarse que mientras en el grupo de Caro y Paul estos se limitaron a una lectura inicial del problema y una poca comprensión de este en sí mismo, lo cual no es inicialmente bueno o malo, el grupo de Ana y Juan manifestó una mayor cantidad de episodios de esta naturaleza. Esto se observaba cuando se retomaban constantemente los enunciados del problema y una vez se realizaba una lectura de los mismos, se realizaban acciones dirigidas a comprender lo que se solicitaba hacer o las condiciones con las que se contaba. Actuaciones como las expuestas por Juan y Ana son, en palabras de Yimer y Ellerton (2006), catalizadores de decisiones metacognitivas, pues se reconoce si se ha actuado de manera adecuada y si la información contenida en el problema se ha considerado por completo.

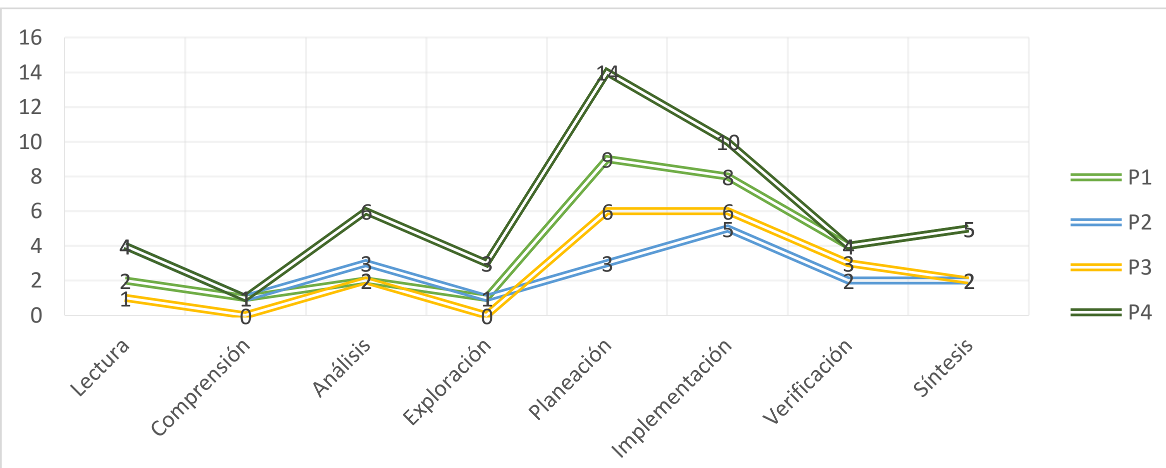


Diagrama 3. Frecuencia de episodios Grupo 1

Respecto al episodio de lectura, en particular, se observa que ambos grupos mostraron una mayor cantidad de acciones relativas a dicho episodio en los problemas 2 y 4, aquellos que involucraban los triángulos isósceles y la obtención de algunos cuadriláteros respectivamente. Estos problemas fueron complejos para los estudiantes, pues fueron en los que se demandó mayor tiempo para su resolución. En el caso del problema 2, mientras el grupo de Ana y Juan ofrecieron una conjetura no tan afortunada, en términos de su generalidad, el grupo de Caro y Paul brindo una conjetura que no guardaba relación con lo solicitado. En el caso del problema 4 se tuvo que realizar un ejercicio de lectura en varias oportunidades dada la extensión del mismo y la cantidad de condiciones involucradas.

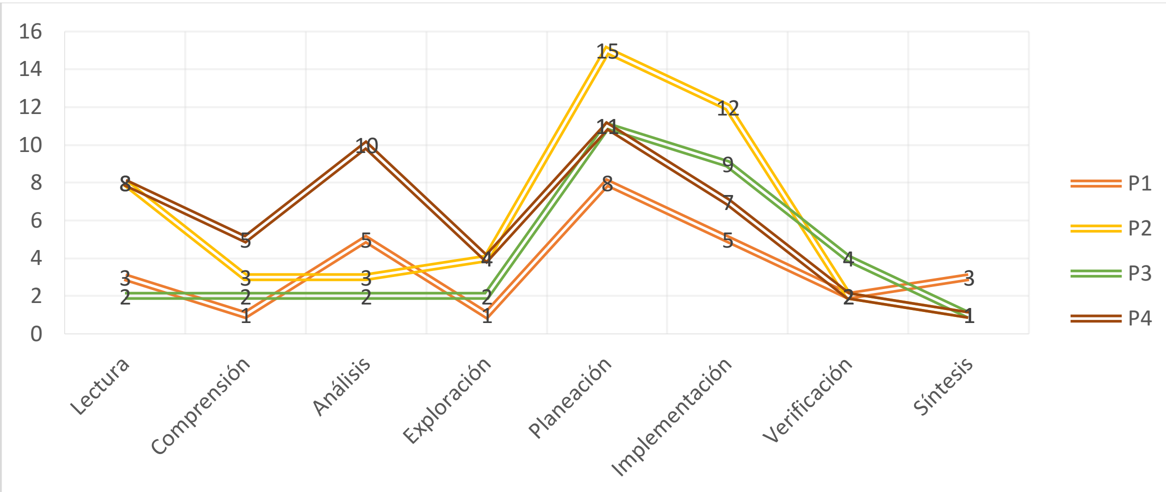


Diagrama 4. Frecuencia de episodios Grupo 2

En el caso del episodio de análisis, el grupo de Ana y Juan exhibieron, en general, una mayor cantidad de episodios de esta naturaleza con respecto al otro grupo. Esto puede observarse en el tipo de trabajo realizado al abordar cada problema, pues mientras Caro y Paul se enfocaban en trabajar a partir de casos particulares para verificar en cada uno el cumplimiento de propiedades, lo cual parecía una reacción inmediata, Juan y Ana realizaron un trabajo enfocado en descubrir características suficientes y necesarias de objetos geométricos en los que estas propiedades se satisficieran. Esto tuvo una implicación en las conjeturas elaboradas por cada grupo a los problemas propuestos, pues como ya se mencionó, las conjeturas de Caro y Paul no gozaron de una generalidad en su contenido, mientras que las propuestas por Juan y Ana si lo lograron.

Por último, sobre el episodio de exploración, el cual se manifestó en pocas oportunidades en ambos grupos, e inclusive fue nulo para el grupo de Caro y Paul en una oportunidad, se puede decir que en el problema 4, dada su naturaleza, se promovieron mayor cantidad de acciones enmarcadas en este episodio, con respecto a los otros problemas, en los que la exploración fue mínima. Esto permite decir, apoyándose en lo que ya se ha reportado en la literatura acerca de la geometría dinámica, que la exploración en este ambiente se genera ante una situación de incertidumbre, en la que no se sabe cómo proceder o qué condiciones deben darse para que otra se pueda satisfacer, por lo cual, el ejercicio de realizar una exploración sobre la situación explorada, lleva a reconocer información que en un momento inicial se desconocía.

Caro y Paul no tuvieron ese inconveniente en los tres primeros problemas, pues su trabajo se enfocó en trabajar apoyándose en casos particulares, esperando reconocer en cuales de estos se cumplía la propiedad estudiada. Juan y Ana, a diferencia del otro grupo, realizaron un trabajo que no contempló esta estrategia, por lo cual se vieron enfrentados a una situación por completo desconocida en cada problema y en consecuencia el software se utilizó como recurso para el descubrimiento de información que posteriormente se utilizaría como insumo para la formulación de una conjetura.

Una mirada a la distribución del tiempo empleado en el proceso de resolución por parte de cada grupo permite ver que el grupo de Paul y Caro tuvo en general una dedicación mayoritaria a realizar acciones de implementación, seguido de acciones propias de análisis (ver Diagrama 5 y Diagrama 6). Una situación distinta aconteció en el trabajo realizado por Juan y Ana, quienes dedicaron en algunos problemas una cantidad de tiempo mayor para el análisis del problema y una menor cantidad de tiempo en la implementación de acciones. Este comportamiento ya ha sido reportado en la literatura, particularmente autores como Cai (1994) han mencionado que cuando los estudiantes dedican una mayor cantidad de tiempo en la planeación y análisis del problema abordado, con respecto a la ejecución de acciones, obtiene mejores resultados que aquellos estudiantes que dedican una gran cantidad de tiempo realizando acciones sobre las cuales no hay un proceso de reflexión, análisis o planeación.

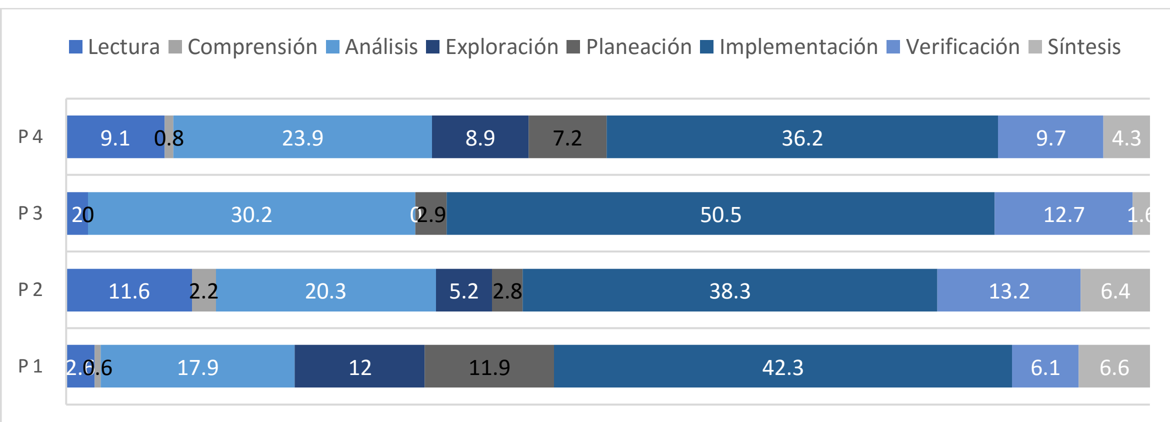


Diagrama 5. Porcentaje de duración episodios Grupo 1

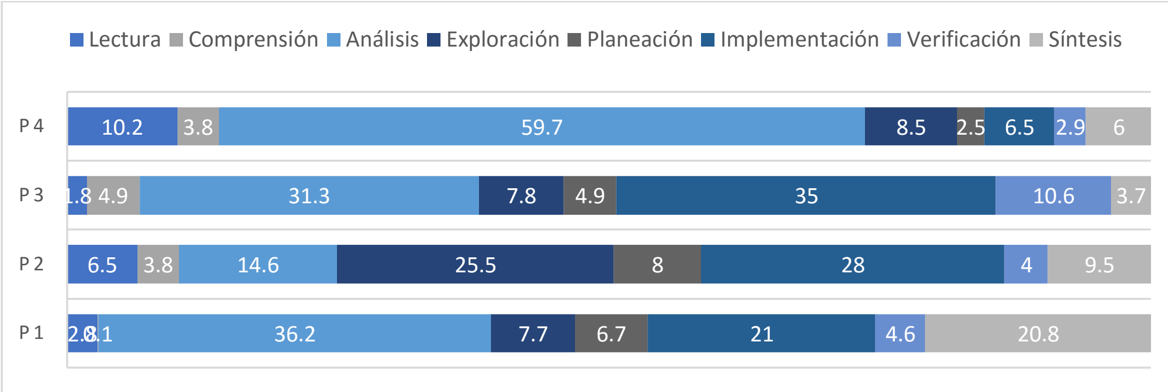


Diagrama 6. Porcentaje de duración episodios Grupo 2

Sin embargo, debe considerarse que el grupo de Juan y Ana invirtieron una gran cantidad de tiempo en la justificación de la conjetura elaborada en los problemas 4 y 1. En el problema 4 se realizaron varios esfuerzos para justificar una conjetura para la que no se tenían los elementos teóricos suficientes, mientras que en el primer problema se empleó mayor tiempo en la justificación de la conjetura debido al conflicto entre las representaciones hechas en papel y en GGB. En el caso de los otros episodios, aunque se observan diferencias entre ambos grupos, estas no son abismales, de hecho, se observa una tendencia de distribución semejante entre los grupos, haciendo la salvedad que se mencionó anteriormente. Desde este punto de vista, podría considerarse que parte de los motivos que llevaron a que el trabajo de Juana y Ana fuera mucho más productivo, en términos de las conjeturas formuladas, que el presentado por Paul y Caro, obedeció a la estrategia de trabajo adoptada, aquella que en el caso de Caro y Paul consistió en trabajar en casos particulares y que en el trabajo de sus compañeros se caracterizó como una búsqueda de condiciones suficientes y necesarias que permitieran satisfacer lo que el problema les solicitaba, usando el software como herramienta de descubrimiento, más que de verificación.

UN ESTUDIO SOBRE LOS COMPORTAMIENTOS METACOGNITIVOS

Presentamos ahora un análisis de los comportamientos metacognitivos observados en el trabajo realizado por cada grupo. Particularmente, realizamos una presentación de los comportamientos metacognitivos más recurrentes en la interacción sostenida por cada grupo y aquellos comportamientos que tuvieron mayor presencia en cada uno de los episodios del proceso de resolución. A través de este análisis queremos reconocer diferencias y similitudes en el trabajo realizado por los estudiantes al abordar las tareas propuestas y ver si la GD tiene alguna incidencia en los mismos.

Comportamientos característicos en el proceso de resolución

Una vez se identificaron los comportamientos metacognitivos en cada proceso de resolución, los cuales se presentaron ya en el anterior capítulo, se realizó un ejercicio cuya meta era reconocer cuales eran los comportamientos más recurrentes en cada uno de los grupos, tratando con ello de evidenciar alguna similitud o diferencia en sus actuaciones. Para ello se realizó una lista de los comportamientos metacognitivos identificados y esta se codificó, como se presenta en la Tabla 19. Posteriormente, se elaboró un formato de doble entrada (Tabla 20 y Tabla 21) en el que se colocaban los comportamientos metacognitivos observados (columnas) y los episodios de resolución de cada problema afrontado (filas).

Comportamientos metacognitivos	Código	Comportamientos metacognitivos	Código
Identificar partes del problema que pudieran ser omitidas	CM1	Buscar información en las representaciones gráficas construidas	CM21
Lectura de las partes principales del enunciado	CM2	Cuestionar las acciones realizadas	CM22
Identificar o retomar las condiciones expuestas en el enunciado del problema	CM3	Generalizar resultados a partir del trabajo realizado	CM23
Extraer información de una representación gráfica	CM4	Revisar el trabajo realizado con el fin de no olvidar detalles	CM24
Establecer conclusiones gracias a la exploración realizada en GD	CM5	Revisar el enunciado del problema y lo que este solicita	CM25
Usar representaciones gráficas/simbólicas para soportar o comunicar ideas	CM6	Verificar los resultados y la pertinencia de las respuestas obtenidas	CM26
Reconocer dificultades	CM7	Elaborar justificaciones para soportar o rechazar ideas	CM27
Acceder a conocimiento relevante	CM8	Elaborar una síntesis o parafrasear lo que el problema solicita o presenta	CM28
Manipular objetos geométricos	CM9	Revisar el enunciado del problema para identificar las partes del problema	CM29
Examinar posibles relaciones entre los objetos geométricos construidos	CM10	Cuestionar el conocimiento involucrado o afirmaciones realizadas	CM30
Anticipar resultados o relaciones geométricas	CM11	Reformular resultados y conclusiones para estos se ajuste a lo descubierto	CM31
Usar representaciones gráficas para formular o reconocer resultados	CM12	Reconstruir argumentos que previamente se presentaran	CM32
Verificar la validez o generalidad de propiedades o relaciones	CM13	Indagar por los motivos que llevan al cumplimiento de una propiedad	CM33

Elaborar o modificar un plan y proyectar formas de proceder, dado un objetivo	CM14	Sugerir nuevas acciones para lograr un objetivo o meta trazada	CM34
Escoger o realizar acciones pertinentes	CM15	Clarificar el objetivo del problema o información suministrada	CM35
Cuestionar, analizar o examinar alguna estrategia adoptada	CM16	Evocar el objetivo el problema	CM36
Verificar los pasos realizados y detalles del plan trazado	CM17	Dividir un problema en otros más pequeños	CM37
Realizar acciones en consonancia con algún plan trazado	CM18	Clarificar el objetivo de un plan	CM38
Controlar la realización de acciones con base en el plan trazado	CM19	Revisar las construcciones realizadas	CM39
Contrastar las acciones realizadas y lo proyectado	CM20	Proponer distintas formas de justificar una idea	CM40

Tabla 19. Códigos comportamientos metacognitivos observados

Después de ello se realizaron marcas en los casos en los que un comportamiento metacognitivo tenía presencia en alguno de los episodios. Esto permitió reconocer cuáles de estos comportamientos tuvieron mayor presencia en el proceso de resolución y con ello, cuáles comportamientos eran más recurrentes en el trabajo realizado por cada grupo. Los resultados de este ejercicio se presentan a continuación.

Código Comp. Met.		CM1	CM2	CM3	CM4	CM5	CM6	CM7	CM8	CM9	CM10	CM11	CM12	CM13	CM14	CM15	CM16	CM17	CM18	CM19	CM20	CM21	CM22	CM23	CM24	CM25	CM26	CM27	CM28	CM29	CM30	CM31	CM32	CM33	CM34	CM35	CM36	CM37	CM38	CM39	CM40	
P1	Lect.	x	x																																							2
	Compr.			x																																						1
	An.				x	x	x		x																			x														5
	Expl.									x	x	x	x	x																												5
	Plan.														x	x	x	x																								4
	Impl.								x			x							x	x	x	x	x	x																		8
	Ver.													x										x	x	x	x	x														6
	Sínt.					x																		x																		2
P2	Lect.		x	x																x									x	x												5
	Compr.																												x													1
	An.					x			x				x															x			x											5
	Expl.															x				x																						2
	Plan.														x																											1
	Impl.						x		x	x		x				x			x	x				x																		8
	Ver.						x							x																		x	x									4
	Sínt.					x																		x																		2
P3	Lect.																																									0
	Compr.																																									0
	An.						x		x																			x			x			x								5
	Expl.																																									0
	Plan.														x																											1
	Impl.			x		x	x		x			x		x		x					x							x			x				x							11
	Ver.			x		x	x		x			x			x	x			x														x									9
	Sínt.					x			x															x							x											4
P4	Lect.			x					x											x										x												4
	Compr.																																			x						1
	An.			x		x	x		x								x							x				x	x		x			x			x	x				12
	Expl.			x			x		x	x		x												x				x			x								x			9
	Plan.						x		x						x		x																		x				x			6
	Impl.			x		x	x		x			x				x	x			x				x				x			x				x				x	x		14
	Ver.			x			x		x					x			x			x				x			x				x		x		x							11
	Sínt.					x																		x				x			x											4
Frec. P1		1	1	1	1	2	1	0	2	1	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	1	1	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	33
Frec. P2		0	1	1	0	2	2	0	2	1	0	1	1	1	1	2	0	0	1	3	0	0	0	2	0	0	0	1	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	28
Frec. P3		0	0	2	0	3	3	0	4	0	0	2	0	1	2	2	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	2	0	0	3	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	30
Frec. P4		0	0	5	0	3	5	0	6	1	0	2	0	1	1	1	4	0	0	3	0	0	0	5	0	0	1	4	1	1	5	0	1	1	3	1	1	1	3	1	0	61
Total		1	2	9	1	10	11	0	14	3	1	7	2	5	5	6	5	1	3	7	2	1	1	11	1	1	2	9	3	2	9	1	3	2	4	1	1	1	3	1	0	

Tabla 20. Comportamientos recurrentes en el grupo 1

Código Comp. Met.		CM1	CM2	CM3	CM4	CM5	CM6	CM7	CM8	CM9	CM10	CM11	CM12	CM13	CM14	CM15	CM16	CM17	CM18	CM19	CM20	CM21	CM22	CM23	CM24	CM25	CM26	CM27	CM28	CM29	CM30	CM31	CM32	CM33	CM34	CM35	CM36	CM37	CM38	CM39	CM40	
P1	Lect.		x	x																																						2
	Compr.																												x													1
	An.						x	x	x			x											x	x							x			x								8
	Expl.					x	x					x							x				x																			5
	Plan.			x											x																								x			3
	Impl.			x		x	x					x				x				x																			x			7
	Ver.					x	x					x		x		x				x				x				x			x											9
	Sínt.						x					x								x				x			x	x			x											7
P2	Lect.		x																											x										x		3
	Compr.											x																								x						2
	An.			x			x		x			x											x					x			x				x						x	9
	Expl.					x				x	x	x																x							x				x			7
	Plan.								x						x																				x	x						4
	Impl.					x	x		x	x		x				x							x					x			x								x			10
	Ver.									x													x	x			x						x									5
	Sínt.			x		x														x			x																			4
P3	Lect.			x																																						1
	Compr.						x		x			x												x					x													5
	An.			x		x	x		x	x					x									x			x				x			x				x				11
	Expl.					x	x		x	x		x				x																			x							7
	Plan.			x											x	x								x			x				x								x			7
	Impl.			x		x	x		x	x		x				x				x			x								x								x			11
	Ver.					x	x			x				x						x							x				x											7
	Sínt.																			x				x																		2
P4	Lect.			x			x																																			2
	Compr.			x								x			x														x		x											5
	An.					x	x	x	x	x		x		x	x													x			x							x	x	x		13
	Expl.			x		x	x		x	x		x			x																x									x		9
	Plan.											x			x		x														x											4
	Impl.			x		x	x		x	x						x				x																			x			8
	Ver.								x	x				x	x	x								x																		6
	Sínt.			x																x				x							x											4
Frec. P1		0	1	3	0	3	5	1	1	0	0	5	0	1	1	2	0	0	1	3	0	0	2	3	0	0	1	2	1	0	3	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	42
Frec. P2		0	1	2	0	3	2	0	3	3	1	4	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	4	1	0	0	1	3	0	1	2	0	1	0	3	2	0	0	2	1	1	44
Frec. P3		0	0	4	0	4	5	0	4	4	0	3	0	1	2	3	0	0	0	3	0	0	1	4	0	0	3	0	1	0	4	0	0	1	1	0	0	1	2	0	0	51
Frec. P4		0	0	5	0	3	4	1	4	4	0	4	0	2	5	2	1	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	1	1	0	5	0	0	0	0	0	0	1	2	2	0	51
Total		0	2	14	0	13	16	2	12	11	1	16	0	4	9	8	1	0	1	9	0	0	7	10	0	0	5	6	3	1	14	0	1	2	4	2	0	2	8	3	1	

Tabla 21. Comportamientos recurrentes en el grupo 2

Respecto al grupo de Caro y Paul, puede mencionarse que algunos comportamientos tuvieron una presencia elevada en relación al conjunto total de comportamientos. Particularmente, comportamientos como:

- La identificación o consideración de las condiciones expuestas en el enunciado del problema
- El establecimiento de conclusiones gracias a la exploración realizada en GD
- El uso de representaciones gráficas o simbólicas para soportar o comunicar ideas
- El acceso a conocimiento relevante
- La generalización de resultados a partir del trabajo realizado
- La elaboración de justificaciones para soportar o rechazar ideas
- El cuestionamiento del conocimiento involucrado o afirmaciones realizadas

Fueron aquellos con mayor aparición dentro de todo el trabajo realizado por este grupo. En consecuencia, puede decirse que este grupo tiene una tendencia a realizar un trabajo una vez se han considerado las condiciones del problema, utiliza GD para representar gráficamente los objetos involucrados y sobre estos y la exploración realizada establece resultados. Además, este grupo tiene una tendencia a involucrar elementos teóricos relevantes para resolver el problema, los cuales son objeto de discusión para que se reconozca que realmente aportan. Finalmente, el trabajo realizado por ellos y, en consecuencia, los resultados obtenidos, se generalizan con el fin de avanzar hacia la formulación de la conjetura y todas las ideas que emerjan en su interacción son objeto de análisis, a través del cual se proveen justificaciones sobre su validez o rechazo.

En el caso del grupo de Ana y Juan se observa que hay una mayor cantidad de comportamientos que tienen una representatividad alta. Estos son:

- La identificación o consideración de las condiciones expuestas en el enunciado del problema
- El establecimiento de conclusiones gracias a la exploración realizada en GD
- El uso de representaciones gráficas o simbólicas para soportar o comunicar ideas
- El acceso a conocimiento relevante
- La manipulación de objetos geométricos
- La anticipación de resultados o relaciones geométricas
- La elaboración o modificación de un plan

- El control sobre la realización de acciones
- La generalización de resultados a partir del trabajo realizado

Esto permite ver que este grupo se caracteriza por identificar las condiciones que problema provee y por elaborar planes que regulen sus acciones, sobre las que hay un control al momento de ejecutar los planes propuestos y en las que se da relevancia al uso de representaciones gráficas que les permitan comunicar ideas. En la interacción sostenida se involucra conocimiento relevante que aporte a la obtención de resultados favorables y como fruto de la exploración realizada con ayuda de la GD, en la que se manipulan los objetos geométricos, se procede a formular conclusiones o anticipar resultados potencialmente válidos que pueden ser sometidos a valoración gracias a la GD.

Otros comportamientos también tienen una presencia relativamente alta; sin embargo, son los comportamientos mencionados aquellos que tienen una representatividad notable y permiten construir una idea sobre la forma en que los grupos se caracterizan en el marco de la resolución de problemas. Un hecho que llama la atención al considerar estos resultados es que hay una cantidad alta de estos comportamientos metacognitivos representativos que son comunes a ambos grupos. Este resultado lleva a pensar que entre los grupos existe un patrón, en términos de los comportamientos metacognitivos, con el cual se caracterizan sus formas de proceder. Este hecho, aunque llamativo, tiene una explicación que yace en la formación académica que los estudiantes han recibido, que si bien ha sido extensa para uno de los grupos involucrados, se enmarca en una misma metodología (Perry et al., 2013). Esto último permite afirmar que desde niveles tempranos de formación se promueven habilidades metacognitivas que son de utilidad al afrontar problemas de demostración, por lo que se esperaría que en los niveles superiores estas habilidades se complementaran y se perfeccionaran.

Episodios representativos del trabajo realizado

Por otro lado, de las rejillas elaboradas se puede reconocer que algunos episodios reportan una mayor cantidad y diversidad de comportamientos metacognitivos. Lo que es llamativo en este punto es que en cada uno de los problemas abordados esta tendencia es recurrente e inclusive la comparación entre los dos grupos lleva a obtener resultados similares. En ambos grupos se reconoce que en todos los problemas abordados los episodios de análisis, implementación y verificación reportan una mayor diversidad de comportamientos metacognitivos. Sin embargo, en el grupo de Juan y Ana el episodio de exploración también reporta una gran diversidad de comportamientos en los cuatro problemas abordados. Esto responde al hecho de que los episodios de análisis, implementación y verificación, y en el caso del grupo de Juan y Ana el de exploración, fueran aquellos con una duración de tiempo superior en cada proceso de resolución. Lo anterior significa que a lo largo de estos episodios los estudiantes se comprometen en distintos comportamientos, muchos de los cuales emergen por la incertidumbre que ellos afrontan (análisis de la situación problema), la necesidad de ejecutar acciones, revisar lo que se realiza y si esto es correcto (implementación de algún plan), por el hecho de verse enfrentados ante posibles configuraciones que lleven a una solución del problema abordado y que deba ser corroborada (verificar resultados).

En el caso de Ana y Juan la diversidad de comportamientos metacognitivos exhibida en el episodio de exploración se debe a que este grupo dio un uso al recurso involucrado en una vía distinta a la contemplada por Caro y Paul. Esta forma de involucrar la GD llevó a estos estudiantes a que este episodio tuviera un protagonismo mayor al momento de buscar posibles soluciones a los problemas propuestos y en consecuencia permitiera que algunos comportamientos emergieran. Lo anterior lleva a concluir que la GD promueve comportamientos metacognitivos de distinta naturaleza, en tanto esta sea involucrada a través de acciones dirigidas a explorar una situación y reconocer de dicho ejercicio propiedades o generalidades, mas no como un instrumento de mera verificación.

INCIDENCIA DE LA METACOGNICIÓN EN EL PROCESO DE RESOLUCIÓN

Dentro del proceso de resolución que se observó en cada uno de los problemas ya se hicieron explícitos los comportamientos metacognitivos manifestados en cada episodio, haciendo referencia a algunas implicaciones de estos comportamientos en el proceso de resolución. Presentamos ahora una síntesis de estas descripciones, tratando de buscar una caracterización global de cada grupo en relación a este constructo teórico y brindando una explicación adicional a los resultados obtenidos en cada problema.

Metacognición social

Cada uno de los grupos exhibió algunos comportamientos metacognitivos sociales que aportaron en el proceso de resolución. Aun así, debe reconocerse que en el tránsito de los episodios algunas acciones ejecutadas llevaron a obtener resultados desafortunados en relación a lo presupuestado o a inhibir propuestas que desembocarían en resultados generales o que promoverían rutas de trabajo más eficientes. Se reconoce, como lo mostraremos a continuación y siendo consecuentes con lo expuesto por autores como Chen y Chiu (2015) y Lin y Sullivan (2008) que los giros dados en el proceso de resolución y las rutas tomadas, atendieron principalmente a factores de tipo social, de ahí la trascendencia del tipo de interacción sostenida.

Bondades de la interacción entre Paul y Caro

Este grupo mostró algunos comportamientos metacognitivos que incidieron favorablemente en el proceso de resolución. Ejemplo de ello es la revisión de la lectura del enunciado realizada al inicio, ya que el ejercicio de revisar que se leyera correctamente cada condición conllevaría a que no se dieran confusiones y se tuviera claridad sobre lo que debía realizarse, así como los elementos de los que se disponía. Se reconoce en este punto que este episodio, en correspondencia con lo expresado por Kuzle (2013), permite reportar comportamientos metacognitivos.

Se reconoce también el control ejercido principalmente por Caro sobre las acciones realizadas por Paul al utilizar el software, dado que él fue quien utilizó principalmente este recurso. Estas acciones correspondían a indicar qué hacer, cuándo hacerlo y en algunas oportunidades sugerir que otras acciones se ejecutaran. Este tipo de comportamientos muestra que ambos estudiantes estaban comprometidos con el trabajo realizado y compartían una misma meta (de acuerdo al problema abordado), a la vez que procuraban por una adecuada representación de los objetos y relaciones. Estos estudiantes también sostuvieron discusiones cuyo objetivo era aclarar lo que se debía realizar y lo que el problema solicitaba, evitando que se tuviera que realizar una nueva lectura del enunciado o que se realizaran representaciones gráficas inadecuadas, lo cual les permitió optimizar el tiempo empleado y no realizar esfuerzos infructíferos que desembocaran en resultados erróneos.

En el marco del trabajo conjunto realizado se propusieron acciones que complementaban el trabajo realizado y estas se evaluaban cundo no se consideraba que fueran útiles o pertinentes. Esto muestra que en todo momento se evaluaban distintas opciones de trabajo y que se requería una aceptación grupal para su implementación. Por otro lado, los estudiantes procuraban refinar el lenguaje involucrado en sus intervenciones y las afirmaciones planteadas con base en la experiencia vivida y sus conocimientos previos, asunto que promovía una comunicación clara en relación a los objetos geométricos involucrados.

Los estudiantes en todo momento proveyeron una explicación justificada a sus afirmaciones, no aceptaban algún resultado apoyándose únicamente en evidencia empírica y respetaban y retomaban las aproximaciones hechas por su compañero; esto permite reconocer unas normas establecidas entre ellos, a través de las cuales se debe brindar soporte a sus intervenciones y afirmaciones. Ligado a esto último, se reconocen las discusiones sostenidas entre ellos al momento de implementar algún plan, discusiones que llevaban a refinar las propuestas hechas y ejecutarlas de la mejor forma. En esta misma línea se puede mencionar que el trabajo realizado por parte de los estudiantes atendió a planes que se formularon y aceptaron de manera conjunta, lo que permite afirmar que se compartieron metas y esquemas de trabajo.

En el caso particular del segundo problema se debe mencionar el hecho de que cada miembro propusiera posibilidades respecto a las propiedades del triángulo ABC, puesto que este tipo de acciones abría el conjunto de posibilidades de cada uno gracias a las sugerencias de su compañero. Como complemento a este comportamiento se señala la puesta en marcha de cada propuesta formulada, puesto que esto es evidencia de que todas las propuestas manifestadas debían ser objeto de estudio y en este sentido se observó un escenario de respeto, abierto a la discusión; sin embargo, Caro daba la oportunidad de que las ideas de Paul se desarrollaran una vez ella desarrollabas las propias. Se reconoce también la presencia de momentos en los que los estudiantes implementaban acciones que favorecieran la visualización, las cuales eran propuestas por ellos mismos a través de construcciones auxiliares o la determinación de medidas de ángulos o longitudes de segmentos.

En el marco del proceso de resolución se establecieron resultados a medida que nueva evidencia empírica se descubría, esto permitió que se tuviera claridad del progreso en el proceso de resolución y se pusieran en discusión propuestas y resultados generalizados. Finalmente, en algunas oportunidades los estudiantes reformularon el problema y sus resultados en términos propios, lo que los llevó a comprender lo expresado allí, en este proceso se negociaban significados y se establecían producciones conjuntas.

Desventajas de la interacción sostenida entre Paul y Caro

Por otro lado, se reconocen algunos aspectos desafortunados del trabajo conjunto que tuvieron incidencia en los resultados obtenidos al resolver los problemas.

En el primer problema se observó que en el momento que los estudiantes establecieron como resultado que el rectángulo satisfacía la perpendicularidad de las bisectrices, Paul propuso construir un rectángulo de manera robusta para verificar este resultado, idea ignorada por Caro, quien se apoyó en la representación gráfica para soportar el cumplimiento de dicha propiedad. Si bien es cierto que la propiedad se cumplía en este cuadrilátero, el proceso de verificación se soportó únicamente en la observación de las medidas de los ángulos en un caso particular y de ahí se procedió a establecer una generalización. Debe reconocerse que en otro contexto (problema) es posible que no todo rectángulo llegara a cumplir una propiedad, sino que alguna otra propiedad debiera tenerse en cuenta, lo cual sitúa un escenario problemático, pues la forma de proceder de este grupo, inducida por Caro, correspondió a llegar a generalidades a partir de un caso particular. El desaprovechar la propuesta de Paul, en atención a esta situación, anteponiendo y no negociando una forma de proceder (por parte de Caro) no fue una buena decisión.

En un momento posterior el grupo, dentro de su trabajo apoyado en cuadriláteros particulares, consideró, analizó y descartó el trapecio como uno donde la propiedad se cumplía. Esta decisión no fue acertada y llevó a que un resultado importante y general se descartara y se avanzara hacia una solución particular (solo los paralelogramos cumplen la propiedad). Este resultado se originó al no contemplar otra pareja de ángulos adyacentes en el trapecio y apoyarse en el resultado que se observaba al considerar únicamente una pareja de ángulos. Esto lleva a cuestionarse sobre la existencia de una real comprensión del problema, en el que se hablaba de una pareja cualquiera de ángulos adyacentes. Si alguno de los miembros del grupo hubiese propuesto evaluar la propiedad en otra pareja de ángulos, hubiesen descubierto un resultado que sumado al del paralelogramo, les hubiera podido formular una conjetura más general. Llama la atención que en este episodio sí se utilizara la función de arrastre del software al ver que en una configuración inicial del trapecio la propiedad no se cumplía, tratando de buscar un caso donde sí se cumpliera esta, caso distinto al evidenciado en el rectángulo, donde con una sola configuración se procedió a establecer una generalidad.

En el caso del segundo problema se debe mencionar que desde un inicio se asumió, quizás de manera implícita, porque el enunciado del problema no lo mencionaba, que los lados congruentes de los triángulos isósceles debían ser unos en particular. Los estudiantes en ningún momento se cuestionaron por la posibilidad de que fuera otra pareja de lados la que mantuviera la congruencia y bajo el supuesto hecho por ellos, llegaron a un momento en que establecieron como resultado que el punto P debía cumplir unas propiedades para que los triángulos fueran isósceles, las cuales no guardaban relación con lo solicitado. Esto se suma al hecho de que los estudiantes, aun cuando realizaron en distintos momentos una lectura del enunciado, nunca reconocieron la condición de que ambos triángulos fueran isósceles y aun cuando descubrieron la propiedad enunciada del punto P, no se percataron de que uno de los triángulos dejaba de existir. Aun cuando en el único episodio de comprensión observado, presentado sobre el inicio del proceso realizado, se hizo énfasis en que los dos triángulos debían ser isósceles, esta consideración se vio difusa en lo que posteriormente se realizó.

En el tercer problema se puede mencionar, en primer lugar, el hecho de interrumpir el desarrollo o ejecución de estrategias en curso sin informar sobre los motivos de ello, lo que generaba un ambiente de confusión para Paul dada la ausencia de conocimiento sobre un criterio que motivara tales decisiones. Nuevamente se evidencia, al parecer es un hábito en este grupo, el establecimiento de generalidades apoyadas en el resultado evidenciado en un único caso, asunto que llevó a descartar resultados generales. En el proceso de justificación ubicado en el final del proceso de resolución se observó que Caro tomó el protagonismo de la elaboración de este y no consultaba a Paul sobre la aplicabilidad de sus ideas o sobre su comprensión respecto a lo que ella mencionaba. Paul por su parte intervino en algunas oportunidades, pero Caro retomaba sus ideas y continuaba desarrollándolas sin dejar que él expusiera sus propuestas y recibiera una retroalimentación a estas.

Finalmente, en el cuarto problema se observó nuevamente que Caro no dio un desarrollo en algunas oportunidades a las propuestas de Paul y antepuso sus ideas para que estas fueran tenidas en cuenta principalmente. Una de estas situaciones ocurrió cuando Paul quería brindar una justificación al hecho de poder obtener un rectángulo, episodio en el que se hubiera podido reconocer alguna condición que llevara a obtener dicho resultado e inclusive a considerar este resultado a través de una conjetura, asunto solicitado a través del problema. A propósito del rectángulo, en un momento Paul establece lo que para él era una justificación de dicho resultado, sin embargo este se apoyó en evidencia empírica y ninguno de los estudiantes se percató de ello y dio como válida la argumentación desarrollada. Caro fue una persona que no tuvo confianza en los argumentos dados por Paul en algunas oportunidades. Cuando Paul ofreció una justificación al hecho de no poder obtener un cuadrado o rombo, Caro manifestó aceptación ante tal argumento, pero después de ello, en más de una oportunidad, rompía el esquema de trabajo planificado y manipulaba el cuadrilátero para ver si era posible obtener uno de estos cuadriláteros, ante lo que Paul retomaba sus ideas y nuevamente las exponía a Caro.

Beneficios del trabajo de Ana y Juan

En el caso del trabajo realizado por Ana y Juan al resolver los cuatro problemas también se reconocen aspectos metacognitivos de orden social que incidieron positivamente en los resultados obtenidos. En primer lugar, los estudiantes se comprometieron en todo momento de la tarea, lo cual se justifica por la presencia de comportamientos ligados al control de las acciones realizadas y las decisiones, planes o procesos que eran propuestos por uno de los estudiantes y aceptados por su compañero antes de ser implementados. En la misma vía que lo anterior, puede mencionarse el continuo aporte de propuestas por parte de los estudiantes para resolver el problema, las cuales ellos consideraban podían contribuir al descubrimiento de propiedades o la justificación de las mismas. Este tipo de comportamientos daba cuenta de un interés compartido por lograr que el problema fuera resuelto a la vez que delegaba en cada estudiante la responsabilidad de regular lo que su compañero realizaba. Así mismo, en estos episodios se reconoce que la aceptación o rechazo a las mismas yace en el seno de una conversación argumentada, que se apoya en elementos teóricos conocidos por ellos.

El hecho de leer el problema al finalizar etapas del proceso de resolución como la representación gráfica de las condiciones y la obtención de una conjetura, permitió que se tuviera presente lo que correspondía hacer ahora y que todas las acciones realizadas apuntaran a la consecución de un mismo logro. En todo momento los estudiantes comunicaban a su compañero los avances en el proceso de exploración, lo que permitía ir refinando de manera conjunta las propiedades encontradas y avanzar en la formulación de una conjetura.

En el proceso de resolución se observa un grupo que en la mayoría de las oportunidades toma decisiones de manera compartida, lo que significa que la forma de proceder de uno de sus miembros es conocida y aceptada por su compañero. Esto lleva a asegurar que hay un conocimiento y control sobre el proceso de resolución que se ejecuta. Este trabajo comunal también tiene presencia en las discusiones en las que se intenta obtener un significado de lo que el problema propone. A través de estas discusiones los estudiantes ampliaron su imagen del problema y la nutrieron con las perspectivas de su compañero, lo que los llevó a tener una visión amplia de la situación estudiada. Ejemplo de ello es, en el problema de los triángulos, la identificación de la necesidad de que los dos triángulos fueran isósceles, asunto que llevó a descartar configuraciones en las que apenas uno de estos triángulos lo era y que hubiera conducido a un resultado como el expuesto por el grupo de Caro y Paul.

En algunas oportunidades, dependiendo del proceso de resolución adelantado, los estudiantes compartieron sus preocupaciones y en consecuencia trabajaron con un mismo objetivo en mente. A lo largo del proceso de resolución se observó una dinámica basada en la formulación de hipótesis y la puesta a prueba de las mismas, descartando aquellas que no se ajustaban a lo solicitado por el problema o a los requerimientos de los estudiantes. Esto llevó a configurar un ambiente participativo en que cada propuesta era considerada y estudiada. Al respecto, los estudiantes se involucraron en la discusión, tanto de propuestas de trabajo, como de resultados obtenidos. Esto los llevó a ampliar sus perspectivas, dudar sobre la pertinencia o generalidad de alguna afirmación realizada y establecer resultados conjuntos.

Se rescata también la persistencia de los estudiantes por contar con representaciones muy precisas y con valores muy cercanos, por no decir que exactos, con respecto a los contemplados, antes de proceder a formular resultados. Esto los llevó a utilizar diversas herramientas del software en atención a sus necesidades. Este resultado, aun cuando complejo en su obtención, les permitió a los estudiantes obtener otros valores numéricos con gran precisión y con ello avanzar en la formulación de la conjetura o el reconocimiento de propiedades. En el caso del problema de las bisectrices, cuando Juan tuvo la intención de explicar su razonamiento y mostrar a Ana la propiedad que estaba considerando, involucró un ejemplo particular que le permitió corroborar la misma, a la vez que le permitió comunicar a Ana su planteamiento. En este tipo de comportamientos se evidencia la necesidad de compartir ideas y hacer que estas sean claras, ampliando así el panorama del compañero y que sobre estas se puedan formular otras ideas.

Un comportamiento que tuvo una intención similar al anterior correspondió al observado cuando se dio inicio a la justificación de la conjetura propuesta en este mismo problema, pues ahora era Ana quien evocaba hechos geométricos que pudieran ser útiles en la justificación. Por último, acciones como las realizadas por Juan al momento de justificar la conjetura, en las que resaltaba la importancia de establecer una justificación que fuera general a las dos representaciones realizadas o en las que revisaba la justificación que parcialmente se configuraba, ponía de manifiesto asuntos metacognitivos relativos al control y evaluación, respectivamente, sobre el trabajo realizado.

En el caso del problema de los puntos medios de los lados del cuadrilátero, cuando se inició el episodio de análisis en el que se elaboró la justificación de la conjetura, ambos estudiantes mencionaban hechos geométricos que podían ser incorporados en la justificación, esto les permitió trazar dos rutas distintas de justificación para la misma conjetura. Dentro de este proceso de justificación los estudiantes corrigieron a su compañero cuando este elaboraba un argumento que no era correcto. A raíz de esto, el progreso en la justificación de la conjetura fue desarrollado por ambos estudiantes y no solo por uno, como se ha observado en otros episodios analizados.

Aspectos desafortunados del trabajo de Ana y Juan

Aunque el trabajo realizado brindo resultados afortunados en cada problema, también se observaron algunos comportamientos dentro de la interacción sostenida que desembocaron en resultados y decisiones, dentro del proceso de resolución, no muy afortunados o conducentes a estados de incertidumbre.

Inicialmente, respecto al primer problema, cuando se consideró la estrategia de Ana relativa a la construcción de las bisectrices perpendiculares, Juan pidió explícitamente que se construyera un cuadrilátero apoyándose en unos puntos que en pantalla aparecían y aunque Ana no apoyó esta idea y manifestó lo que debería realizarse, Juan ofreció un argumento no convincente para ella que la llevó a actuar en correspondencia a su idea. El haber acatado la idea de Ana desde un inicio, la cual fue en últimas la que permitió demostrar la conjetura apoyándose en la representación hecha con ayuda de la GD, hubiera evitado que se hubieran enfrascado en unos episodios e incertidumbre al momento de intentar proveer una justificación a la propiedad descubierta. Peor aún es que en ningún momento reconocieron que esta idea, más que pertinente para poder llevar a buen término la demostración, era una condición necesaria, dada la información que en el antecedente se presentaba. Esto último indica que aun cuando la conjetura se formuló en un nivel de generalidad y no de manera particular como Caro y Paul, no hubo una revisión y comprensión de la misma después de haberla redactado o lo que es equivalente, no se reflexionó sobre los objetos involucrados y las relaciones entre ellos al ser representadas gráficamente.

Por otra parte, la propuesta de Juan relacionada con la formulación de una conjetura “general” llevó a que el grupo hiciera un ejercicio de reformulación de los resultados que ya tenían, lo cual no es malo realmente. Lo llamativo en este punto es que Juan tomó la decisión de que esta conjetura debía formularse así, aun cuando reconoció que de la forma en que estaba expresada podía conducir a dos posibles soluciones, pero inclusive la nueva formulación de la conjetura llevaba a una interpretación similar. En ese punto Ana no tomó partida ni manifestó su preferencia por alguna.

Respecto al segundo problema, se puede mencionar, en primer lugar, que en esta oportunidad Ana no demuestra seguridad en muchas oportunidades frente a sus ideas o propuestas. Cuando ella trata de exponer alguna alternativa y Juan le pide una explicación de la misma, ella no ofrece mayores elementos y opta por descartar sus propuestas. Lo problemático es que una de las ideas manifestadas por ella presumiblemente permitiría dar una solución al problema de manera temprana. Específicamente cuando señaló que el triángulo debería tener un ángulo recto. Sin embargo, el abortar esta idea y no desarrollarla no permitió conocer lo que estaba pensando en realidad. Esto se suma al hecho de que, en una oportunidad, en la que Ana propuso una estrategia que potencialmente podría llevar a la respuesta del problema, Juan ignoró a su compañera y trabajó por su cuenta. Por otro lado, si bien es cierto que el grupo se comprometió en ejercicios de comprensión que les permitió reconocer que los dos triángulos debían ser isósceles y que no importaba la configuración de lados que fueran congruentes, también es cierto que el ejercicio de exploración realizado, aun cuando extenso, no atendió a estas consideraciones o inclusive, este se limitaba a manipular uno o dos puntos nada más, abandonando estrategias desarrolladas que estaban cerca de responder a la pregunta que el problema planteaba.

Una situación similar se presentó cuando los estudiantes decidieron trabajar apoyándose en triángulos particulares. En esta oportunidad los estudiantes arrastraban apenas algunos puntos y al ver el no cumplimiento de lo deseado, rechazaban esa posibilidad de inmediato. Otro asunto que debe mencionarse hace referencia al trabajo realizado por Juan, quien realiza un trabajo independiente en una hoja de papel y no comunica a Ana el motivo de ello. Esta situación muestra que en esta oportunidad Juan no realiza un trabajo comunal y ejecuta algunas acciones al margen del trabajo grupal que con Ana se realizó. Este trabajo individual realizado por Juan también se manifiesta cuando él comenta algunas preocupaciones sobre lo reportado en la conjetura, pues aun cuando para él son asunto a atender, Ana no considera esto como relevante pues ella ha sido marginada del trabajo que él realizo y lo llevó a formular este resultado.

Finalmente, en el cuarto problema, llama la atención que el grupo no hubiera considerado que la propiedad propuesta por Ana era válida y de cierta forma equivalente a la contemplada en la conjetura. Rechazar esta posibilidad, apoyándose en el protocolo de construcción, permitió reconocer otra propiedad que fue aceptada, sin embargo, los argumentos para rechazar esta no eran válidos y hubieran podido conducir a un estado de incertidumbre si esta hubiera sido la única posible respuesta. Se reconoce sobre el final del protocolo una actitud de Juan algo individualista, pues no negocia con Ana las conjeturas que podrían formularse y aun cuando ella señala dos conjeturas por completo validas, él antepone su propuesta. Esta elección es desafortunada, pues no se corresponde con lo solicitado por el problema, el cual solicitaba establecer condiciones para determinar tipos de cuadrilátero que se pudieran configurar. Además, esta elección llevó al grupo a un estado de incertidumbre al tratar de justificar una conjetura de la que no se contaba con los elementos teóricos suficientes para probar su validez. En este punto Juan optó por buscar una forma de justificación en la que Ana no tuvo participación, pues para ella era confuso lo que él realizaba en el papel. Como respuesta, Ana realizó un trabajo en GGB que llevaba a proveer una justificación netamente empírica. En síntesis, el trabajo del grupo y los esfuerzos realizados se dividieron.

A modo de síntesis

Del balance entre lo afortunado y lo desafortunado del comportamiento de los grupos al resolver los problemas debe señalarse que estos tienen unos puntos comunes y otros que son distintos entre ellos. A continuación una revisión de los aspectos comunes.

Aspectos afortunados comunales

En términos de los aspectos característicos comunes a ambos grupos, se reconoce un primer elemento asociado a la planeación. El ejercicio de formular un plan llevó a los grupos a que este fuera modificado y aceptado de manera conjunta, mostrando así aspectos ligados al compartimiento de metas y protocolos de trabajo. Se puede reconocer también que en los momentos en que se realizaban operaciones sobre los objetos geométricos (construcciones, transformaciones, determinación de medidas) uno de los estudiantes se encargaba de realizar el trabajo en Geogebra apoyándose de sus funciones, a la vez que su compañero controlaba la realización de cada acción. Esto permitió reconocer una vez más que se tenían metas compartidas al abordar la tarea, que los estudiantes velaban porque la realización de las acciones presupuestadas llegara a buen término y que implícitamente se distribuían tareas entre los miembros del grupo ya que mientras uno se encargaba de realizar el trabajo procedimental en Geogebra, su compañero se encargaba de controlar el buen desarrollo del mismo y liberaba a su compañero de esta responsabilidad. A propósito de esta última idea, debe mencionarse también que en todo momento las acciones realizadas atendieron a un plan propuesto previamente, asunto que muestra una cultura en los estudiantes relacionada con proyectar lo que se realizará antes de proceder a hacerlo. Sin embargo, sobre las proyecciones de acciones a realizar, no se observaron de manera regular momentos de discusión cuyo objeto fuera la pertinencia de algún plan y la posible modificación de alguno de estos.

Los grupos también tuvieron como elemento común la representación adecuada de los objetos geométricos en pantalla, en las que, entre otras cosas, se velaba por la precisión y exactitud de las medidas determinadas (longitudes de segmentos o medidas de ángulos). Como se dijo antes, esto permitía tener mayor seguridad sobre los resultados obtenidos. Cada miembro de los grupos propuso algunas ideas o estrategias que consideraba podían aportar al proceso de resolución y la mayoría de estas eran ejecutadas o contempladas para ver su pertinencia. Este tipo de comportamientos favorecía un ambiente de respeto y aceptación de ideas de distinta naturaleza, aunque debe resaltarse que no fue una constante y como se mostrará más adelante, es aquí que pueden originarse también algunas dificultades al afrontar el problema.

Aunque no en la misma medida, los grupos intentaron dar significado al problema y lo que este solicitaba. Estos esfuerzos llevaron a tener una comprensión del mismo y proceder correctamente, aunque para el caso de Caro y Paul este tipo de acciones estuvo en un nivel inferior y esto llevó a que algunos resultados no fueran tan afortunados. Los grupos también mostraron una constante relacionada al hecho de argumentar sobre estrategias y resultados parciales. Aun cuando el problema solicitaba que esto se realizara en la justificación de conjeturas, durante el proceso de formulación de la conjetura se evidenciaron en ambos casos acciones relativas a la argumentación de resultados observados gracias al uso de Geogebra, muchos de los cuales tomaron por sorpresa a los estudiantes. Estos argumentos eran corregidos por sus compañeros si era el caso o incluso refutados, lo cual amplió el panorama de los estudiantes y modificó sus concepciones personales.

Finalmente, ambos grupos gestionaron un ambiente en el que el progreso en la resolución del problema (ir reconociendo propiedades o descartando posibilidades) era manifestado explícitamente, algo así como retomar lo que se ha realizado hasta ahora y lo que se ha obtenido de dicho progreso. Esto permitió que en todo momento se tuviera en mente en qué parte del problema se encontraban ubicados y qué se había logrado ya, aspecto que favoreció el control de las acciones y la planeación de estrategias.

Aspectos desafortunados comunales

Entre los aspectos que se reconocieron como desafortunados en el trabajo, algunos tuvieron presencia en ambos grupos. A continuación una revisión de los mismos. Hay un asunto central que tuvo presencia en el trabajo realizado por ambos grupos, el cual correspondió al hecho de ignorar algunas propuestas dadas por Ana y Paul en sus respectivos grupos, sumado al hecho de que Caro y Juan antepusieron sus ideas en algunos momentos o tomaban protagonismo en el trabajo realizado sin consultar a sus compañeros si aceptaban lo que se realizaba o si comprendían las estrategias involucradas. Las implicaciones de estos comportamientos, que debe señalarse no fueron constantes sino evidentes en contadas oportunidades, llevaron a que el proceso de resolución diera giros que condujeron a momentos de incertidumbre, ligados a la ejecución de acciones inadecuadas, la formulación de resultados no adecuados o la perdida de rutas de trabajo potencialmente útiles.

Como ya se presentó en la descripción del trabajo realizado, Paul y Ana manifestaron ideas que de haber sido tomadas en consideración por sus compañeros, hubieran desembocado en una resolución del problema afortunada o por lo menos que hubiera requerido menor tiempo en su desarrollo, ejemplo de ello es el caso en que Paul provee una explicación en el problema cuatro respecto a la imposibilidad de obtener rombos o cometas y que Caro parece ignorar al intentar constantemente obtener este tipo de cuadriláteros. Caro y Juan al interior de sus grupos antepusieron sus ideas y propuestas en algunas oportunidades, privando de desarrollar las que sus compañeros habían contemplado, o llevando a que el grupo se enfrascara en momentos de incertidumbre por el camino que se había tomado, ejemplo de ello es el caso en que Juan formula una conjetura en el problema cuatro que no fue posible justificar y que hizo que Ana se descontextualizara del trabajo que se estaba realizando.

Un último aspecto sobre el que se quiere hacer mención en este apartado tiene relación con el hecho de no discutir constantemente acerca de la pertinencia de las propuestas o planes de trabajo. Parecía algo muy básico y corto en duración, como se reporta en la duración de estos episodios en el anterior capítulo, pero es llamativo el hecho de proceder a realizar acciones sin que estas realmente se valoraran o se discutiera sobre su pertinencia. Este tipo de comportamientos llevó a los grupos a adoptar rutas de trabajo cuyos resultados no eran los esperados pues su enfoque era muy limitado (Caro y Paul) o a que se ejecutaran acciones que no eran comprendidas por uno de los miembros y en consecuencia el trabajo comunal se perdiera (Ana y Juan).

Metacognición ambiental

El trabajo realizado por los grupos, además de tener giros originados por la interacción sostenida entre sus miembros, también se vio permeado por el recurso tecnológico involucrado y la retroalimentación que este daba a las acciones que los estudiantes realizaban. En este sentido, la GD promovió de alguna forma comportamientos metacognitivos que no se originaron en el seno de la interacción social, y respondió de acuerdo a las consideraciones hechas por Kim et al. (2013), quienes aseguran que la retroalimentación generada por recursos externos, en este caso Geogebra, promueven comportamientos cognitivos a nivel individual y social. A continuación presentamos la forma en que se involucró el software en cada uno de los problemas y algunos comentarios sobre el uso afortunado o no del mismo.

La verificación de casos a cargo de Paul y Caro

En el primer problema abordado el software de geometría dinámica fue utilizado principalmente como instrumento de verificación de una propiedad en casos particulares de cuadriláteros y en muy pocas oportunidades se utilizó el arrastre de puntos para tener seguridad del cumplimiento de la perpendicularidad de las bisectrices. En particular, en el momento inicial del proceso de resolución, cuando se utilizó la función arrastre para descubrir alguna propiedad, una hipótesis se formuló y se rechazó gracias a la retroalimentación del programa, sin embargo, en lugar de continuar explorando la construcción realizada, lo que los hubiera llevado a descubrir algunas propiedades ignoradas en todo su trabajo, los estudiantes decidieron proyectar una forma de trabajo basada en la verificación de casos particulares. En síntesis, se desaprovechó el potencial de GGB para explorar y descubrir propiedades y este se incorporó meramente como un instrumento de verificación. De lo anterior puede mencionarse que, dado el uso que se dio al software, este no permitió modificar o retroalimentar las concepciones de los estudiantes en un alto nivel, en cuanto el trabajo realizado no los llevó a explorar y cuestionarse por configuraciones distintas a las conocidas por los estudiantes previamente. Sin embargo, la retroalimentación dada en pantalla sí sirvió como referente para la validación del cumplimiento de la propiedad en algunos cuadriláteros o el no cumplimiento en otros. Aunque sobre esto se debe señalar que el uso dado al software y a sus funciones de arrastre y transformación estuvo lejano del deseado por los motivos mencionados al inicio del párrafo.

El segundo problema permite apreciar en su proceso de resolución una particularidad asociada al hecho de realizar un trabajo casi nulo de exploración, sumado al hecho asumir una única configuración de triángulos isósceles y no considerar otras posibilidades. En este proceso de resolución se vuelve a evidenciar el trabajo apoyado en casos particulares que en el primer problema se presentó. La diferencia ahora es que ninguno de los casos estudiados proveyó una respuesta afín a lo solicitado en el problema, lo que llevó a contemplar una posible solución, que desatendía a lo solicitado, solución que fue aceptada por ambos estudiantes y los llevó a elaborar inclusive una justificación de la misma. En el primer problema no se presentó una situación de este tipo en cuanto uno de los cuadriláteros respondió a los intereses de los estudiantes. Sin embargo, en esta oportunidad esto no ocurrió y como los estudiantes no utilizaron tampoco el arrastre para el descubrimiento de propiedades, sus únicas vías de acción (casos particulares) los llevaron a este resultado. El uso que se da al software, particularmente basado en la ausencia de acciones de arrastre y exploración encaminadas a descubrir configuraciones lejanas a las contempladas, no permitió que este ambiente modificara las concepciones de los estudiantes y estas mismas los llevaran a promover una conjetura lejana a lo solicitado. Aun cuando el software retroalimentó las acciones y sobre estas se formularon conjeturas coherentes, el problema del grupo emergió en el momento en que no se hizo una comprensión del enunciado y con ello no se reconoció la posibilidad de utilizar Geogebra y sus funciones de arrastre de una forma alterna a la involucrada hasta ahora.

Del tercer problema podemos mencionar, como ya se ha reportado en el trabajo realizado por este grupo, que la metodología empleada para abordar este tipo de problemas se basa exclusivamente en la verificación del cumplimiento de la propiedad estudiada en cuadriláteros o triángulos conocidos por ellos. Aunque en dos oportunidades este trabajo llevó a establecer un resultado correcto, más no general, en el otro caso (problema de los triángulos) se realizaron acciones que conllevaron a obtener una respuesta inadecuada, aun cuando los estudiantes no reconocen esto y consideran que su trabajo es adecuado. Esta metodología de trabajo ha llevado a que este grupo no formule un resultado general y a que desconozca el potencial de la GD en el reconocimiento de propiedades desconocidas para ellos, como la involucrada en este último problema. Para ellos la GD sirve como herramienta de verificación, mas no de descubrimiento. En esta línea, surge el interrogante sobre lo que ocurriría al proponer un problema donde ningún polígono familiar satisficiera la propiedad solicitada, pues bajo este esquema de trabajo, se desencadenarían episodios de incertidumbre. Incluso, el trabajo orientado a verificar cuadriláteros predeterminados no se hace adecuadamente, pues por un lado se descarta una familia de cuadriláteros a partir de lo acontecido en un único ejemplo donde la propiedad no se cumple, sin explorar la posibilidad de que un conjunto reducido de cada familia pudiera cumplir con la propiedad estudiada. Por otro lado, no se contemplan distintas posibilidades en el mismo ejemplo estudiado, lo que llevaría a poner en duda una comprensión adecuada sobre el problema abordado.

Del último problema se observa que este involucraba la evaluación de casos particulares de cuadriláteros, lo cual era correspondiente al esquema de trabajo propuesto por el grupo en los anteriores problemas. Sin embargo, aun cuando el trabajo del grupo permitió reconocer qué cuadriláteros podían ser obtenidos, no se buscaron las condiciones que llevaban a obtener algunos de estos y en consecuencia las conjeturas correspondientes, tal fue el caso del rectángulo. Por otro lado, en esta oportunidad el grupo realizó un proceso de exploración que los llevó a reconocer que el paralelogramo se podía obtener a partir de una propiedad particular que involucraba a los puntos B, P y D. Este resultado se vio favorecido por el uso de la GD en un proceso de indagación que no pudo ser realizado por la verificación de casos, y en este sentido representó un contexto nuevo para los estudiantes que los llevó a formular una propiedad general. Adicionalmente, fue gracias el uso de la GD que se pudieron reconocer dos propiedades que no eran esperadas por los estudiantes, estas fueron la imposibilidad de obtener un cuadrilátero de lados adyacentes congruentes y la obtención de un paralelogramo al intentar transformar el cuadrilátero en trapecio.

En ambos casos este resultado motivó a los estudiantes a buscar una explicación teórica a lo que sus ojos observaban en pantalla y particularmente en el segundo caso, a formular una justificación completa de dicho resultado, sin que esto hubiese sido solicitado por el problema. En consecuencia, el sacar a los estudiantes de la zona de confort en la que se encontraban, al situarlos en un escenario donde sus formas de proceder no eran válidas y proponerles una situación que los movilizara a descubrir una propiedad nueva para ellos, en la que tuvo presencia el uso de la GD, permitió que este recurso actuara como detonante de una actividad metacognitiva en la que se establecieron metas, se trazó un plan y se actuó en correspondencia al mismo, se verificaran resultados y se ofreciera una respuesta, en este caso la justificación de dicha propiedad.

La búsqueda de nuevas relaciones a cargo de Ana y Juan

En el primer problema, respecto al uso del software, hay dos momentos que muestran un uso totalmente distinto de este recurso y que conducen a resultados y decisiones en distintas vías. Por un lado, Al realizar la construcción inicial, la cual respondía a un esquema de exploración en la que se partía de la condición que debía satisfacerse, el grupo no consideró la posibilidad de arrastrar los puntos que la configuraban, acción que hubiera llevado a reconocer posiblemente la relación de paralelismo involucrada. Esto se suma a lo ya mencionado en este proceso al momento de construir el cuadrilátero a partir de unos puntos que no correspondían. El haber realizado esta acción hubiera podido reducir la cantidad de tiempo empleado y los episodios de incertidumbre. Sin embargo, en contraposición al uso limitado de la GD que se presenta en la anterior situación, debe resaltarse que el proceso de exploración desarrollado después de dicho episodio hizo uso del potencial de la GD. Partir de un cuadrilátero genérico y dos bisectrices, arrastrando los vértices hasta lograr una medida exacta e ir anticipando propiedades sobre el cuadrilátero, las cuales luego se verificarían, para finalmente formular una conjetura, demostraron un proceso de trabajo en el que se trazaban metas, se actuaba en correspondencia a ellas, se anticipaban y verificaban resultados para luego establecerlos como propiedades. Esto último refleja nuevamente el potencial de la GD en el proceso de resolución del problema a la vez que permite reconocer comportamientos metacognitivos favorecidos por el recurso involucrado.

En el desarrollo del segundo problema se pueden mencionar algunos asuntos favorables y otros no tan afortunados. En primer lugar, debe reconocerse que la GD permitió materializar las ideas de los estudiantes y representarlas de forma tal que sus objetivos, ligados a estrategias de transformación de la figura, pudieran llevarse a cabo sin algún problema. Sin embargo, en esta oportunidad los estudiantes no hicieron un uso adecuado de la función de arrastre para explorar las construcciones realizadas en pantalla. Fue un gran avance que ellos reconocieran la necesidad de que ambos triángulos fueran isósceles y que no importaba que par de lados eran congruentes, sin embargo, estas consideraciones no se materializaron en el arrastre realizado y muchas ideas propuestas o aproximaciones, que llevarían a obtener un resultado general, se abandonaron. En este sentido, Geogebra no permitió modificar sustancialmente las concepciones de los estudiantes.

En el tercer problema se observa cómo el software permite a los estudiantes materializar ideas y ser tan precisos en sus construcciones y obtención de medidas como ellos querían. El uso de distintas herramientas de GGB, no solamente de construcción sino también de transformación, permitió a los estudiantes poner a prueba sus hipótesis y descubrir nueva información. Particularmente, la conjetura elaborada, la cual es amplia, atiende a una propiedad que ningún estudiante contempló al inicio y que a través del arrastre de los puntos que determinaban cada figura se pudo evidenciar. En este punto fue clave la postura del grupo para buscar una propiedad que contuviera los casos estudiados y no un trabajo apoyado en casos particulares, en el que al considerar el rombo o cuadrado hubieran encontrado un cuadrilátero que satisfacía la propiedad y con ello, la solución parcial al problema.

En el último problema abordado por este grupo el recurso tecnológico les permitió a los estudiantes realizar un ejercicio de exploración en el que reconocieron algunas propiedades y se descartaron algunas propuestas. Este grupo se ha caracterizado por hacer uso de algunas herramientas sofisticadas del programa al tratar de verificar propiedades y esta no fue la excepción, pues en las oportunidades que se discutía sobre la veracidad de alguna propiedad, esta se sometía a prueba y con base en este ejercicio se validaba o no la misma. El uso de la GD llevó a los estudiantes a reconocer los tipos de cuadrilátero que podían o no ser obtenidos en pantalla, sin embargo adolece que sobre aquellos que no se podían obtener, no se ofreciera una justificación detallada sobre los motivos de dicho resultado.

A modo de síntesis

Al establecer un cuadro comparativo entre las aproximaciones instrumentales realizadas por cada grupo al involucrar Geogebra como recurso de apoyo, se pueden reconocer dos esquemas de trabajo completamente distanciados, que como ya se mencionó anteriormente, provocaron la obtención de resultados distintos en términos de la generalidad de las propiedades descubiertas.

El grupo de Caro y Paul exhibió un uso del software en el que este apoyaba la verificación y cumplimiento de la propiedad estudiada en casos particulares, enfoque que permitió tener seguridad sobre el resultado obtenido, dada la precisión de las medidas determinadas y la posibilidad de comprobar propiedades a través del PGD. Sin embargo, el enfoque de trabajo llevó a considerar algunos casos particulares y en consecuencia a obtener también resultados particulares, dejando de lado un trabajo dirigido a la exploración y descubrimiento de información que apoyara la formulación de resultados más generales. Este panorama deja ver un uso de las funciones de Geogebra limitadas, pues se reconoce su carácter de precisión y sobre este se soportan afirmaciones que validan o refutan hipótesis, sin embargo se deja de lado la función de arrastre y con ello la oportunidad de descubrir relaciones nuevas y modificar concepciones previas. La función de arrastre utilizada por este grupo se limitó a un contexto de exploración muy vago y a la verificación del incumplimiento de alguna propiedad en un tipo particular de cuadrilátero o triángulo, mas no al descubrimiento de cuadriláteros o triángulos en los que la propiedad se satisficiera en todo momento.

De este grupo queremos resaltar también el episodio acontecido en el cuarto problema, donde al tratar de transformar la construcción en un trapecio, descubrieron que el cuadrilátero obtenido era un paralelogramo en todo momento, lo que motivo a los estudiantes a formular una justificación de este resultado, aun cuando el problema no solicitaba que esto se realizara. Esto es llamativo y algo muy afortunado, pues fue gracias a la retroalimentación dada por el software que se dio el descubrimiento de un resultado nuevo para ellos, que los cuestionó por el motivo por el que este se daba y con ello acciones metacognitivas como planear acciones (justificar por qué es cierto), ejecutarlas (proveer una justificación), controlar el trabajo realizado (retomar argumentos elaborados para justificar lo observado) y revisar los resultados (establecer una síntesis de lo descubierto) tuvieron lugar. Algo similar aconteció en este mismo problema cuando se dio una justificación al hecho de no poder transformar el cuadrilátero en cometa o rombo.

En el caso del grupo de Ana y Juan, el enfoque bajo el cual Geogebra se utilizó fue totalmente diferente. Este grupo se caracterizó por buscar tipos de cuadriláteros o triángulos en los que la propiedad se cumpliera. Esto los llevó a utilizar las funciones de arrastre y con ello a descubrir propiedades que eran desconocidas por ellos, inclusive insospechadas, las cuales no caracterizaban un tipo particular de cuadrilátero, sino una familia de estos. Este ejercicio permitió realizar un trabajo más productivo, en comparación al realizado por Caro y Paul, pues bajo las condiciones descubiertas se caracterizaba un tipo de cuadrilátero, que a su vez contenía algunos tipos de cuadriláteros (por ejemplo, el cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares, donde se incluyen rombos, cometas y algunos trapecios). En este sentido, el software proveyó una retroalimentación a las acciones realizadas por los estudiantes que modificó sus concepciones y les permitió formular conjeturas y realizar un trabajo de exploración más productivo.

Aun así, queda un interrogante abierto en este punto sobre el impacto y movilización de argumentos deductivos como soporte a los resultados obtenidos y descubiertos al interactuar con Geogebra. Este grupo siempre proveyó justificaciones a las conjeturas elaboradas, pues esto se solicitaba en el enunciado del problema, sin embargo, cuando algunos resultados particulares aparecían como fruto de su interacción con el software, no siempre se brindaba una justificación teórica a los mismos. Ejemplo de ello es lo ocurrido en el desarrollo del problema 4, donde los estudiantes descubrieron que no se podía obtener un trapecio, una cometa o un rombo, pero la justificación a esta imposibilidad se quedó en un nivel empírico principalmente, distinto a lo reportado en el grupo de Caro y Paul, donde justificaciones deductivas sí se realizaron. Esto podría atender a la experiencia vivida por Caro y Paul en su formación matemática, la cual es amplia en comparación a la vivida por Ana y Juan, quienes apenas habían cursado un espacio académico.

CONCLUSIONES

Presentamos en este capítulo los resultados de la investigación realizada. Recordemos que a través del estudio presentado en este documento se querían identificar los comportamientos metacognitivos que tenían lugar en la resolución de problemas geométricos, en los que tenía presencia la GD, particularmente Geogebra, por parte de futuros profesores de matemáticas. Bajo este objetivo general se quería responder a interrogantes como cuáles son los tipos de comportamientos metacognitivos que tienen presencia al resolver problemas de demostración en ambientes colaborativos; cómo la GD promueve comportamientos metacognitivos en los estudiantes y, finalmente, qué naturaleza tienen los procesos de resolución de problemas de demostración, en términos de los posibles patrones de comportamientos que entre los episodios pueden emerger y la presencia o ausencia de episodios al abordar este tipo de problemas. Esto último permitiría caracterizar la forma de actuar de los estudiantes al intentar resolver este tipo de problemas.

El estudio realizado involucró cuatro estudiantes de un programa de formación inicial de profesorado en matemáticas que mostraban diferencias en su formación académica, pues mientras dos de ellos habían terminado segundo año de formación y habían cursado cuatro espacios académicos de la línea de geometría, los otros dos estudiantes apenas habían finalizado su primer semestre académico y en consecuencia solo habían cursado un primer espacio académico de esta línea. Esto colocaba una variable adicional en el estudio realizado, una referida al nivel de formación y experiencia académica de los estudiantes, lo cual permitiría analizar también si los resultados obtenidos mantenían semejanza con los reportados en la literatura, donde ya se ha señalado que el nivel de formación académica no es fundamental en el proceso de resolución de problemas y que aspectos de orden metacognitivo tienen un rol primordial. Los resultados obtenidos, las respuestas a los interrogantes planteados al inicio y las proyecciones que emergen de este estudio se presentan a continuación.

¿QUÉ COMPORTAMIENTOS METACOGNITIVOS TIENEN PRESENCIA AL RESOLVER PROBLEMAS DE DEMOSTRACIÓN EN AMBIENTES COLABORATIVOS?

Podemos concluir que en cada uno de los problemas propuestos fue posible observar comportamientos metacognitivos por parte de ambos grupos, los cuales orientaron y permitieron avanzar en el proceso de resolución. Esto apoya la idea de Goos, Galbraith y Renshaw (2002; citado en Hurme & Järvelä, 2005), para quienes la metacognición en una dimensión social tiene presencia en la resolución de problemas en configuraciones colaborativas.

El análisis realizado en el anterior capítulo permite reconocer comportamientos metacognitivos al interior de cada grupo, de acuerdo al episodio de resolución en el que se encontraran los estudiantes. Estos comportamientos tuvieron presencia en el seno de un trabajo colaborativo al resolver cada problema. Aun cuando los problemas pudieran evocar rutas distintas de trabajo o aproximaciones particulares para proveer una respuesta, en los episodios observados se reconocen algunos comportamientos característicos de cada grupo (intra-grupo) e inclusive algunos que eran compartidos entre los grupos (inter-grupo).

En un nivel intra-grupal se reconocen comportamientos metacognitivos en cada uno de los episodios del proceso de resolución. Esto soporta la idea de Kuzle (2011, 2013b), quien asegura que en cada episodio de la resolución de problemas tienen presencia comportamientos metacognitivos. Como se vio en el anterior capítulo, algunos comportamientos tenían mayor recurrencia de acuerdo al grupo analizado y esto llevó a que distintas formas de abordar el problema emergieran.

En un nivel inter-grupal se observan comportamientos metacognitivos comunes en ambos grupos, resultado que podría sustentarse a través de la metodología involucrada en los espacios académicos de geometría. Dado que los estudiantes han tenido experiencias en su formación en este tipo de espacios académicos similares, en términos de su metodología, parece que la misma naturaleza del espacio académico promueve, a través de la gestión del profesor, el desarrollo y promoción de comportamientos metacognitivos en los estudiantes que posteriormente son utilizados de manera genuina por ellos al afrontar una situación problema. De manera similar a lo expuesto por Chiu et al. (2013), en este estudio se reconocieron algunos beneficios y desventajas o desafíos en el trabajo grupal observado.

En términos de los beneficios evidenciados, dentro de estos comportamientos se encuentran unos referidos a la planeación de acciones, su aceptación e implementación; se reconoce también que todas las acciones realizadas por los estudiantes estuvieron supeditadas a algún plan o propuesta de trabajo, lo que significa que para los estudiantes es esperado que cada acción realizada atienda a alguna propuesta declarada explícitamente. Otros comportamientos metacognitivos estuvieron relacionados a la distribución de cargas cognitivas y al control de las acciones realizadas, presentes en el momento en que se distribuían funciones, pues mientras uno de los estudiantes realizaba representaciones gráficas en Geogebra, su compañero vigilaba que lo realizado fuera correcto y estuviera en correspondencia con lo planeado.

Se reconocen otros comportamientos ligados a la exactitud y precisión en las representaciones realizadas en Geogebra, lo cual les permitió establecer resultados acertados gracias a la precisión del software. Algunos comportamientos asociados a la necesidad de justificar ideas y afirmaciones con base en elementos teóricos se identifican. Este tipo de acciones permiten clarificar sus ideas y exponer con claridad y seguridad el pensamiento a su compañero, recibiendo retroalimentación de él y ampliando así el campo de visión personal. Finalmente, se reconoce una conversación entre los estudiantes a lo largo del proceso de resolución en la que se recogen los resultados obtenidos, esto con el fin de tener un estado compartido acerca del proceso de resolución adelantado y los resultados parciales obtenidos, así como avanzar en la formulación de una conjetura que respondiera a lo solicitado.

En cuanto a los desafíos y dificultades observadas, algunas de las cuales han sido reportadas en la literatura con anterioridad, el estudio realizado permite observar que en distintas oportunidades las contribuciones de uno de los estudiantes en cada grupo se anteponen a las ideas de su compañero. Esto lleva a que ideas valiosas se desatendieran y que el trabajo de un giro desafortunado en términos de los resultados obtenidos en cada problema. En estos casos no se daba retroalimentación a las propuestas de los estudiantes, simplemente se ignoraban sus ideas, por lo cual para estos estudiantes no era claro el motivo por el que sus ideas no eran tomadas en consideración.

En síntesis, la interacción sostenida por los estudiantes permitió que se reconocieran y discutieran posturas personales que llevaron en la mayoría de los casos a ampliar el conocimiento metacognitivo personal. Lin y Sullivan (2008) mencionan la existencia de una relación bicondicional entre la metacognición y las interacciones sociales, relación que se pudo observar en el estudio realizado. Por un lado, a partir de la presencia de habilidades metacognitivas como la necesidad de comunicar ideas claramente y dar un soporte a estas, la consideración de lo expuesto por el compañero de trabajo y el monitoreo del trabajo de los miembros del grupo, se promovió una interacción social provechosa para sus miembros en términos de los resultados expuestos y el proceso mismo de resolución. Por otro lado, la interacción sostenida por los estudiantes, en la que se realizaba un ejercicio de comprensión de los problemas abordados, se discutían las propuestas de cada miembro y se brindaba una retroalimentación a las mismas, permitió que las habilidades metacognitivas de cada estudiante se vieran favorecidas, ampliando su campo de visión gracias a los aportes de su compañero.

Goos (1994) rescata el trabajo grupal como un mecanismo que potencia el desarrollo y práctica de la autorregulación en la resolución de problemas. Sin embargo, menciona esta autora, comportamientos como ignorar las propuestas de su compañero, conlleva a no resolver algunos de los problemas propuestos. Raes et al. (2016), como complemento a esto aseguran que la regulación metacognitiva de los estudiantes se favorece gracias a la resolución de problemas colaborativos. En este trabajo tiene presencia la construcción compartida de conocimiento y la necesidad de gestionar un ambiente de discusión y regulación de las actividades cognitivas propias, así como la de sus compañeros. Para Goos (1994) se requieren tres condiciones (normas) para que este tipo de trabajo sea productivo: el respeto mutuo, una distribución equitativa de conocimiento y una distribución equitativa en el poder. Esto último deja abierta la pregunta sobre las condiciones que favorecen o entorpecen la autorregulación metacognitiva en el trabajo por parejas.

¿Promueve la geometría dinámica comportamientos metacognitivos al resolver problemas?

Aun cuando autores como Guven et al. (2012) sostienen que la investigación que se ha realizado alrededor de la GD tomó como foco de estudio los procesos de conjetura y verificación y dejó de lado el estudio de estrategias para resolver problemas, se reconoce que ya se reportan antecedentes investigativos en los que se han involucrado recursos computacionales, como la GD, en la resolución de problemas (Barrera-Mora & Reyes-Rodríguez, 2013; Iranzo & Fortuny, 2011; Sandoval & Moreno, 2012), involucrando además de este constructo la relación con los procesos metacognitivos (Valencia et al., 2012; Kuzle, 2012). La investigación realizada en este documento aporta en esa misma línea y a su vez extiende el campo de observación considerado por Kuzle al involucrar problemas de demostración.

Consideramos, de igual manera que Abdelfatah (2011) y Koyuncu, Akyuz y Cakiroglu (2015), que la GD tiene un papel relevante en el marco de la resolución de problemas. La precisión del software y la posibilidad de realizar construcciones tan precisas como se desea, sumado al hecho de recibir una retroalimentación en pantalla a lo realizado, provocaron que los estudiantes reconocieran en este recurso una herramienta de validación y soporte, con la cual se tomaban decisiones sobre las acciones ejecutadas y resultados obtenidos. Este recurso permite que se descarten posibilidades y algunas propiedades insospechadas se descubran, con lo cual se promueven comportamientos metacognitivos como la planeación de estrategias (evaluar casos o arrastrar puntos hasta obtener lo deseado) y su respectiva implementación. Adicionalmente, el software permite que comportamientos dirigidos al control de las acciones realizadas y la verificación de resultados se puedan llevar a cabo, llevando con ello a que se establezcan resultados cuyo soporte puede ser netamente empírico o se apoye en una justificación que involucra elementos teóricos.

Apoyándonos en las ideas de Kuzle (2011, 2013) reconocemos la GD como un recurso con el cual el trabajo productivo involucraba el uso de comportamientos metacognitivos. En el trabajo realizado por uno de los grupos se observó que el uso de Geogebra para el reconocimiento de propiedades conllevó a que el grupo se comprometiera en distintos tipos de comportamientos de esta naturaleza, los cuales permitieron monitorear las acciones realizadas, formular estrategias o modificar las mismas de acuerdo a lo que la pantalla mostraba y proveer posibles explicaciones a los mismos a medida que nueva información se descubría.

Lo anterior es evidencia del impacto e importancia de la GD en la metacognición de los estudiantes pues muestra, de la misma manera que Kim et al. (2013) lo señalan, que los recursos externos a los que acceden los estudiantes al abordar un problema proveen una retroalimentación a sus acciones, la cual modifica las concepciones de los estudiantes y amplían su campo de visión y comprensión. En consecuencia, la GD, a través de la retroalimentación que provee al usuario o grupo de estos, aporta a la metacognición en un nivel individual y en uno social. Este resultado guarda relación con lo expuesto por Guven et al. (2012), quienes ven en la GD un recurso que modifica el proceso de resolución, pues este amplía o limita el conjunto de heurísticas con las que cuentan los estudiantes y ofrece, en términos de Olive & Makar (2000; citado en Kuzle, 2012), una perturbación única al estudiante, perturbación que en nuestro estudio lleva a la consideración de posibilidades y comportamientos metacognitivos que difícilmente se alcanzarían en lápiz y papel.

Se observa que la GD promueve la necesidad de brindar una justificación a los resultados descubiertos, pero dicho comportamiento no es evidente en todos los estudiantes. El grupo de Caro y Paul brindó una justificación a un resultado que los tomó por sorpresa mientras exploraban algunas configuraciones en pantalla. Por su parte, Ana y Juan, al llegar a este mismo resultado no vieron la necesidad de ello y continuaron explorando otras configuraciones en pantalla. Este fenómeno ya ha sido reportado por Healy y Hoyles (2001), quienes mencionan que para llegar a un nivel en el que se justifican de manera genuina, sin que se solicite en la tarea, los resultados que se obtienen al afrontar un problema, se requiere tiempo pues este comportamiento no es espontáneo.

Finalmente, se reconoce que las experiencias de los estudiantes pueden afectar las estrategias y acciones cognitivas al afrontar un problema. Caro y Paul en todo momento involucraron un conjunto de acciones dirigidas a analizar casos particulares, las cuales no fueron del todo afortunadas en terminos del producto alcanzado. Este fenómeno corresponde a lo expuesto por Chiu et al. (2013), para quien este tipo de comportamientos atiende a una posicion de los estudiantes en la que su esquema de trabajo es persistente y hay una negativa a la posibilidad de abandonarlo, aun cuando este sea inadecuado. Posiblemente este grupo tuvo experiencias en las que esta aproximación era afortunada, de ahí que esta se fijara en ellos y se evocara automáticamente, al abordar problemas similares a los presentados acá.

En este caso, las experiencias afortunadas con este tipo de aproximación ayudaron a que no se reconociera otra vía de acción y en consecuencia el enfoque de trabajo fuera limitado y dejara de lado el uso de las funciones de Geogebra para descubrir relaciones más generales. Esto no es bueno si consideramos que en la resolución de problemas no siempre las estrategias de solución involucradas en un problema pueden ser transferidas a otra situación, por el contrario, cada problema requiere un enfoque diferenciado, de acuerdo a lo solicitado. En consecuencia, se requieren estrategias generales para abordar un problema, independientemente de lo que este plantee, más que estrategias particulares que en algunos casos (problemas) puedan ser productivas.

¿QUÉ APORTA LA METACOGNICIÓN A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS?

Es válido asegurar que el proceso de resolución de problemas se vio permeado por comportamientos metacognitivos tanto en el nivel social como ambiental. La interacción sostenida entre los estudiantes o la retroalimentación ejercida por la GD lleva a que ellos amplien sus miradas y ajusten sus acciones, aspecto que difícilmente se logra en un trabajo en solitario. Estos comportamientos apoyan en todo momento el proceso de resolución, pues como se vio en el análisis realizado, cada episodio exhibió este tipo de comportamientos, algunos con mayor cantidad de comportamientos asociados (análisis, implementación y verificación) con respecto a otros (planeación y lectura). En consecuencia, la metacognición no está aislada del proceso de resolución y con base en esta se orientan decisiones y la forma de proceder, por lo que la metacognición aporta, en correspondencia con su definición, un control y orquestación de las acciones realizadas cuando se apunta a un logro específico.

El estudio reportado muestra diferencias entre dos configuraciones (grupos) analizadas, las cuales se dan a partir de los procesos metacognitivos exhibidos en cada configuración. Uno de los grupos mostró una tendencia a realizar ejercicios de comprensión sobre lo que el problema les solicitaba, revisando periódicamente el enunciado del problema e invirtiendo mayores esfuerzos en el análisis de las situaciones estudiadas; el otro grupo, por su parte, mostró una tendencia cíclica en su trabajo al margen del tipo de problema abordado. Aun cuando se reconocen diferencias y similitudes en el estilo de trabajo de estos grupos, se observa que la metacognición aporta elementos a cada estilo. En línea con lo expuesto por Mayer (1998), Erbas y Okur (2012) y Furinghetti y Morselli (2009), el conocimiento, aspecto de orden cognitivo, no es suficiente para dar respuesta adecuada a un problema. Este proceso involucra componentes metacognitivos, por parte del individuo que los afronta, que permitan manejar la complejidad del problema y evaluar el progreso realizado.

¿QUÉ NATURALEZA TIENEN LOS PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE DEMOSTRACIÓN?

La literatura reporta un crecimiento en las investigaciones en las que se estudia la demostración a la luz de los constructos teóricos de la resolución de problemas (Koichu & Leron, 2015; Weber, 2005). Este ejercicio analítico ha llevado a que los términos propios de la investigación realizada sobre la resolución de problemas sean empleados para describir el proceso de demostración y con ello comprender los motivos que llevan a que un estudiante falle al realizar un problema de esta naturaleza o las estrategias instruccionales que deben promoverse para el favorecimiento de esta práctica matemática. De acuerdo a Weber (2005), el estudio de la demostración desde esta perspectiva tendría un gran valor, dado el panorama no muy afortunado sobre las actuaciones de los estudiantes al afrontar este tipo de problemas.

En este estudio se involucraron problemas de demostración, sobre los cuales el análisis realizado, apoyado en los protocolos generados, llevó a determinar la existencia de un nuevo tipo de episodio que complementaba la propuesta teórica adoptada de Kuzle. La presencia de este episodio se da en el momento de resolución en el que los estudiantes se comprometen con acciones dirigidas a recoger los resultados obtenidos, retomar las experiencias que han tenido y confrontarlas con su bagaje teórico y avanzar así en la formulación de una conjetura. De acuerdo a esta descripción, este episodio es particular en este tipo de problemas, pues en consonancia con autores como Özen y Köse (2013) y Lárez (2014), el uso de la GD en la resolución de problemas demanda que se reconozcan nuevas fases del proceso de resolución, las cuales en sus palabras corresponden a la formulación de conjeturas. Consideramos que este es un aporte al modelo teórico de Kuzle cuando se involucran problemas de demostración.

Patrones de comportamiento entre los episodios

Del estudio realizado observamos la aparición de dos esquemas de trabajo diferenciados, en términos de la aparición y engranaje entre los episodios de resolución. También se reconocen algunas tendencias sobre la forma en que cada episodio tiene presencia en el marco de la resolución de un problema.

Se reconoce que a través del análisis de protocolos es posible identificar los momentos que tienen presencia en el proceso de resolución de cada problema. A través de estos se modelan los comportamientos exhibidos por los estudiantes y provee una explicación a los resultados obtenidos en función de este modelo. Igualmente, a través de este ejercicio se reconocen diferencias y similitudes en el trabajo realizado por cada grupo (Dinnel et al., 1984). Del ejercicio realizado se reconoce el comportamiento recurrente de uno de los grupos, el cual podría considerarse como cíclico en términos de las acciones realizadas y en consecuencia de los episodios exhibidos. En este este esquema de trabajo se planteaban propuestas de acción, estas se ejecutaban, lo que llevaría a verificar los resultados y sintetizarlos o simplemente proponer un nuevo plan que permitiera avanzar en la búsqueda de soluciones.

El trabajo realizado por este grupo, si bien permitió ofrecer una respuesta en tres problemas, no llevó a reconocer propiedades en uno de estos, el de los triángulos isósceles. En el proceso de resolución se reconoció un comportamiento idéntico al adoptado en los otros problemas, aunque en esta oportunidad no los llevó a una respuesta acertada, aspecto desconocido por los estudiantes quienes tuvieron seguridad de que sus acciones habían sido adecuadas y la respuesta ofrecida lo era también. Goos y Galbraith (1996; citados en Bjuland, 2007) han señalado que el proceso de resolución de algunos estudiantes se reduce a realizar una lectura rápida del enunciado e implementar de inmediato una ruta para su solución sin ser conscientes de la fiabilidad de la misma, lo cual parece haber siempre en este grupo, con la particularidad que en uno de los cuatro problemas no fue afortunado este esquema de trabajo.

Haciendo eco a Erbas y Okur (2012), en relación a lo observado en esta oportunidad, algunas estrategias pueden ser afortunadas o no de acuerdo a la persona que las implementa. Esto equivale a decir que la elección de una estrategia afortunada (de acuerdo a lo visto en los problemas 1, 2 y 4 en este grupo) al resolver un problema no garantiza que lleve a la obtención de un resultado afortunado (problema 2). De acuerdo a Gourgey (1998, 2001), esto hace un llamado a una instrucción en la que se promueva el monitoreo y evaluación de las decisiones tomadas, reconociendo con ello si estas pueden ser apropiadas en cualquier oportunidad.

En el otro grupo no se reconoció un patrón recurrente en sus actuaciones al resolver los problemas, pero si se pudo identificar que los estudiantes se comprometían a través del episodio de lectura y comprensión para determinar o proponer un conjunto de acciones a ejecutar, las cuales al ser realizadas llevaban nuevamente a revisar el enunciado del problema y revisar el progreso alcanzado. En este último caso se observa como el episodio e lectura es catalizador de las acciones que deben realizarse y en consecuencia los comportamientos metacognitivos que podrían tener lugar. Esta idea es compartida con Yimer y Ellerton (2006), quienes han observado en sus estudios que el tránsito que se da entre una y otra fase de resolución se da gracias a la lectura del enunciado del problema, reconociendo así que este episodio orienta a los estudiantes al permitirles identificar si se ha tenido en cuenta toda la información relevante suministrada por el problema.

El trabajo realizado por este segundo grupo permitió reconocer distintos enfoques y comportamientos metacognitivos, en los que la GD tuvo gran protagonismo, dada la posibilidad de materializar sus ideas y descubrir con ello nueva información. De acuerdo a lo expresado por Erbas y Okur (2012), actuaciones de este tipo llevan a que los estudiantes obtengan resultados adecuados en comparación con aquellos estudiantes que limitan el número de estrategias incorporadas.

¿Se da preferencia a algunos episodios de resolución?

Se observa que los grupos, al afrontar cada uno de los problemas, muestran una tendencia general en la presencia de cada episodio de resolución. En el trabajo de los estudiantes se reconoce una gran presencia de episodios de implementación y planeación. Sin embargo, otros episodios como la verificación, la comprensión y la exploración muestran una tendencia baja en general. Se concluye que en los protocolos de resolución no todos los episodios tienen presencia de la misma forma, algunos tienen mayor protagonismo y estos no se manifestaban en un orden lineal. De acuerdo a Erbas y Okur (2012) esto es natural y esperado, Kuzle (2015) inclusive resaltó esta particularidad al analizar el modelo propuesto por Polya, haciendo énfasis en la no necesaria ruta lineal entre los episodios de resolución.

Muchos modelos elaborados alrededor de la resolución de problemas contemplan una fase asociada a la verificación de resultados y el modelo propuesto por Kuzle no escapa a ello. Sin embargo se reconoce que la representatividad de este episodio no fue alta para ambos grupos. Muchas veces la verificación de algún resultado se limitaba a la observación de que este se cumplía en apenas una única configuración. No podemos en este punto tomar una postura sobre lo bueno o malo de este tipo de comportamientos, pues como se vio en el análisis realizado, en uno de los grupos esta presencia de episodios llevó a buenos resultados, mientras que en el otro grupo, aun cuando llevó a la resolución de algunos problemas, la respuesta era muy particular. Inclusive, aquellos problemas que no fueron tan accesibles para los estudiantes (segundo y cuarto) mostraron una tendencia similar.

Se reconoce que el problema cuatro, dada su diferencia con respecto a los otros, favoreció que una mayor cantidad de episodios de lectura y análisis tuviera lugar. Esto significa que proveer una situación problema a los estudiantes que los retire de su zona de confort, en términos de heurísticas predeterminadas que consideran apropiadas, conllevan a que el proceso de resolución, si bien mantiene una tendencia similar a la aquí reportada, promueva en mayor medida otros episodios que normalmente son invisibles. Esfuerzos encaminados a caracterizar este tipo de problemas de demostración son requeridos.

Aun cuando en ambos grupos se reconoce una alta presencia de episodios de planeación e implementación en su trabajo y con ello se logra observar que toda acción realizada por los estudiantes está supeditada a la formulación de una propuesta de trabajo, debe mencionarse que dentro de los comportamientos metacognitivos asociados a los episodios de planeación, la mayoría de estos correspondían apenas a proponer un plan en atención a un objetivo, dejando de lado comportamientos como la discusión sobre la pertinencia o accesibilidad de llevar a cabo una propuesta. Esto significa que para los estudiantes es muy natural proponer rutas de acción, pero no reflexionar sobre la pertinencia de estas.

De hecho, la GD favorece este tipo de actuaciones, pues permite que rápidamente y con gran precisión se puedan ejecutar distintas operaciones sobre los objetos representados en pantalla. Aun cuando la GD permite manifestar este tipo de actuaciones, las implicaciones de las mismas, en términos de los resultados alcanzados y el trabajo cognitivo realizado por los estudiantes si puede traer consecuencias en el resultado de este proceso. Ejemplo de ello es lo ocurrido en el trabajo realizado por Caro y Paul, donde la ausencia de una reflexión y análisis sobre los planes propuestos llevó a que las acciones ejecutadas proveyeran resultados desafortunados en algunas oportunidades.

ACERCA DE LA FORMACIÓN ACADÉMICA Y EL PROCESO DE RESOLUCIÓN

Una variable que se involucró en el estudio fue la presencia de dos grupos cuya formación académica y experiencias en el desarrollo de problemas de demostración mantenía una diferencia notable. La literatura reporta que en estudios realizados donde se comparan sujetos cuya formación académica es distinta, en términos del proceso de resolución, los resultados obtenidos no favorecen generalmente a aquellos individuos que cuentan con una experiencia mayor (Cai, 1994; Goos, 1994). La investigación ha reportado que la metacognición tiene presencia en este escenario y permite explicar cómo sujetos con un conocimiento limitado pueden obtener mejores resultados que otros sujetos con mayor cantidad de conocimientos.

Del estudio realizado se concluye que el grupo de estudiantes que gozaba de mayores experiencias en su formación académica, reconocimiento y uso de la GD y antecedentes en los que se veían enfrentados a problemas de demostración con ayuda de este recurso computacional, no reportó mejores resultados que el grupo de estudiantes que apenas había cursado un primer espacio académico de geometría. Este resultado aporta evidencia al resultado presentado en el anterior párrafo y a su vez coloca el foco de atención en un asunto que podría tener incidencia en este tipo de resultados. Como se vio en el anterior capítulo, el grupo de Juan y Ana, contando apenas con un semestre de formación, reportó mayor cantidad de comportamientos metacognitivos en su trabajo y un esquema de trabajo que difícilmente se pudo caracterizar como recurrente.

Por su parte, Caro y Paul, aun cuando reportaron comportamientos metacognitivos recurrentes, estos fueron menores en comparación a los del otro grupo, además exhibieron un esquema de trabajo repetitivo. Lo anterior lleva a considerar la posibilidad de que, a lo largo del proceso formativo, a través del cual se complementan y amplían los conocimientos teóricos de la geometría, aspectos como el trabajo realizado en GD y la presencia de comportamientos metacognitivos se vean perjudicados. Esta afirmación requiere mayores soportes e invita, en consecuencia, a realizar estudios comparativos en otros contextos que contrasten o amplíen lo expuesto acá.

Es claro que estas habilidades metacognitivas no son espontaneas ni se desarrollan de manera natural por los estudiantes (Chen & Chiu, 2015; Chiu et al., 2013, p. 78). Apoyados en las ideas de estos autores reconocemos que el desarrollo de estos comportamientos se da en un ambiente gestionado por el profesor, en el cual se reconocen comportamientos de esta naturaleza, se practican, interiorizan y recibe retroalimentación sobre su desarrollo. Mayer (1998) y Hollingworth & Mcloughlin (2005) hacen mención sobre la posibilidad de promover los componentes metacognitivos a través de la instrucción y de acuerdo a los resultados presentados en el anterior capítulo, parece que las metodologías de los cursos de geometría de este programa de formación promueven este tipo de habilidades, sin embargo, poco se conoce sobre la forma en que estas se potencian y se complementan a través de nuevas experiencias. La metodología estos espacios formativos pertenece al conjunto de enfoques instruccionales que promueven habilidades metacognitivas (Kim et al., 2013), las cuales, como se ha documentado, tienen una naturaleza tal que se pueden transferir a distintos contextos o problemas abordados.

PROYECCIONES INVESTIGATIVAS

Lo presentado en estos apartados corresponde apenas al estudio realizado en un contexto particular, que, si bien aporta elementos al campo investigativo, particularmente al estudiar problemas de demostración e involucrar profesores de matemáticas en formación, no permite generalizar los resultados encontrados. Por lo tanto, se requieren estudios adicionales en otros contextos, con los que se puedan contrastar resultados o reconocer invariantes que permitan avanzar en la formulación de generalidades. Del estudio realizado se reconocen algunos asuntos que merecen una atención en futuras investigaciones. Una presentación de dichos asuntos sigue a continuación.

Un primer asunto que merece la pena ser estudiado en futuras oportunidades guarda relación con los comportamientos metacognitivos presentes exclusivamente en la demostración de alguna conjetura. En el estudio desarrollado se realizó este análisis en el proceso de resolución de los problemas de demostración, en los que se involucraba también la formulación de conjeturas. En el análisis realizado no se pudieron reconocer esquemas de trabajo o una gama de episodios que tuvieran presencia en este proceso. Más bien, se veía la justificación de cualquier conjetura como una amalgama en la que apenas se podían reconocer acciones asociadas con el episodio de análisis. Los estudiantes evocaban un conjunto de hechos geométricos conocidos y de manera espontánea la demostración se formulaba. Por lo tanto, estudiar y caracterizar los comportamientos de estudiantes al intentar proveer una justificación a alguna conjetura permitiría reconocer qué pasa por sus mentes y de qué forma se enlazan las condiciones iniciales de este problema (antecedente) con el estado final del mismo (consecuente).

Un segundo asunto que merece la pena ser estudiado tiene que ver con la naturaleza de los comportamientos metacognitivos emergentes cuando se abordan problemas de demostración en los que se debe formular una conjetura en comparación con los problemas en los que solamente se requiere proveer una demostración a algún enunciado. Un estudio de esta naturaleza permitiría reconocer las bondades y desventajas de proponer uno u otro tipo de problema a los estudiantes, así como los tipos de comportamientos metacognitivos favorecidos en cada caso. En lo realizado en este estudio se pudo observar que durante el proceso de conjetura se elaboraban argumentos que apoyaban en un momento final la justificación de las conjeturas propuestas y con ello comportamientos metacognitivos particulares como la justificación de ideas y afirmaciones. En el otro tipo de problemas considerados este tipo de comportamientos no tendría lugar, pues los episodios en los que estos se promueven ya no tendrían presencia.

Finalmente, un tercer asunto a considerar se refiere a la naturaleza de los comportamientos metacognitivos que emergen en el marco de problemas donde se solicita demostrar un enunciado cuando en su desarrollo tiene presencia la GD y cuando no se tiene acceso a dicho recurso. Esta comparación permitiría ver si el uso de la GD favorece comportamientos metacognitivos que promueven una resolución del problema en un nivel superior en comparación al proceso exhibido cuando no se tiene acceso a este recurso. Si bien es cierto que la literatura reconoce en las fuentes externas un promotor de metacognición, no se sabe en qué grado los comportamientos metacognitivos favorecidos por este conllevan a un proceso de resolución óptima.

REFERENCIAS

Abdelfatah, H. (2011). A story-based dynamic geometry approach to improve attitudes toward geometry and geometric proof. ZDM - International Journal on Mathematics Education, 43(3), 441–450. http://doi.org/10.1007/s11858-011-0341-6

Anderson, J. R., Lee, H. S., & Fincham, J. M. (2014). Discovering the structure of mathematical problem solving. Proceedings of the 6th International Conference on Educational Data Mining, 97(1976), 163–177. http://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2014.04.031

Artzt, A. F., & Armour-Thomas, E. (1992). Development of a Cognitive-Metacognitive Framework for Protocol Analysis of Mathematical Problem Solving in Small Groups. Cognition and Instruction, 9(2), 137–175.

Aydın, U., & Ubuz, B. (2010). Structural model of metacognition and knowledge of geometry. Learning & Individual Differences, 20(5), 436–445. http://doi.org/10.1016/j.lindif.2010.06.002

Barrera-Mora, F., & Reyes-Rodríguez, A. (2013). Cognitive processes developed by students when solving mathematical problems within technological environments Barrera-Mora & Reyes-Rodríguez. The Mathematics Enthusiast, 10(1), 109–136.

Baxter, P., & Jack, S. (2008). Qualitative case study methodology: Study design and implementation for novice researchers. The Qualitative Report, 13(4), 544–599. http://doi.org/citeulike-article-id:6670384

Bayat, S., & Tarmizi, R. (2010). Assessing Cognitive and Metacognitive Strategies during Algebra Problem Solving Among University Students. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 8(5), 403–410. http://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.056

Bjuland, R. (2007). Adult Students' Reasoning in Geometry: Teaching Mathematics through Collaborative Problem Solving in Teacher Education. The Montana Mathematics Enthusiast, 4(1), 1–30.

Cai, J. (1994). A protocol-analytic study of metacognition in mathematical problem solving. Mathematics Education Research Journal, 6(2), 166–183. http://doi.org/10.1007/BF03217270

Callahan, L., & Garofalo, J. (1987). Metacognition and School Mathematics. The Arithmetic Teacher, 34(9), 22–23.

Camargo, L., Samper, C., & Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. Lecturas Matemáticas Volumen Especial, 371–383.

Carlson, M. P., & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. Educational Studies in Mathematics, 58(1), 45–75. http://doi.org/10.1007/s10649-005-0808-x

Chen, C., & Chiu, C. (2015). Collaboration Scripts for Enhancing Metacognitive Self-regulation and Mathematics Literacy. International Journal of Science and Mathematics Education, 1–18. http://doi.org/10.1007/s10763-015-9681-y

Chinnappan, M. (1998). Schemas and mental models in geometry problem solving. Educational Studies in Mathematics, (36), 201–217.

Chinnappan, M., & Lawson, M. (1996). The effects of training in the use of executive strategies in geometry problem solving. Learning and Instruction, 6(1), 1–17.

Chiu, M. M., Jones, K. A., & Jones, J. L. (2013). Building on Schoenfeld's Studies of

Metacognitive Control Towards Social Metacognitive Control. In Y. Li & J. Moschkovich (Eds.), Proficiency and Beliefs in Learning and Teaching Mathematics (pp. 69–85). SensePublishers. http://doi.org/10.1007/978-94-6209-299-0_6

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. In 28 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 339–352). http://doi.org/10.1007/s10763-004-6785-1

Cox, M. T. (2005). Metacognition in computation: A selected research review. Artificial Intelligence, 169(2), 104–141. http://doi.org/10.1016/j.artint.2005.10.009

De Villiers, M. (2010). Experimentation and proof in mathematics. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives (pp. 205–221). Springer US. http://doi.org/10.1007/978-1-4419-0576-5_14

Dettori, G., Greco, S., & Lemut, E. (1998). Information Technology and problem solving in mathematics education. In G. Marshall & M. Ruohonen (Eds.), Capacity Building for IT in Education in Developing Countries (pp. 299–307). London: Chapman & Hall. http://doi.org/10.1007/978-0-387-35195-7_32

Dindyal, J. (2014). International Comparative Studies in Mathematics: An Overview. In Encyclopedia of Mathematics Education (Stephen Le, pp. 320–325). Springer Netherlands. http://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_83

Dinnel, D., Glover, J., & Ronning, R. (1984). A provisional model of mathematical problem solving. Bulletin of the Psychonomic Society, 22(5), 459–462.

Duffield, J. a. (1991). Designing computer software for problem-solving instruction. Educational Technology Research and Development, 39(1), 50–62. http://doi.org/10.1007/BF02298106

Eisenhardt, K. (1989). Building Theories from Case Study Research. The Academy of Management Review, 14(4), 532–550. http://doi.org/10.5465/AMR.1989.4308385

Erbas, A. K., & Okur, S. (2012). Researching students' strategies, episodes, and metacognitions in mathematical problem solving. Quality and Quantity, 46(1), 89–102. http://doi.org/10.1007/s11135-010-9329-5

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. American Psychologist, 34(10), 906–911. http://doi.org/10.1037/0003-066X.34.10.906

Furinghetti, F., & Morselli, F. (2009). Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: Affective and cognitive factors in proving. Educational Studies in Mathematics, 70(1), 71–90. http://doi.org/10.1007/s10649-008-9134-4

Garofalo, J., & Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. Journal for Research in Mathematics Education. http://doi.org/10.2307/748391

Gawlick, T. (2002). On Dynamic Geometry Software in the regular classroom. Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik, 34(3), 85–92. http://doi.org/10.1007/BF02655711

Goos, M. (1994). Metacognitive decision making and social interactions during paired problem solving. Mathematics Education Research Journal, 6(2), 144–165. http://doi.org/10.1007/BF03217269

Goos, M., & Galbraith, P. (1996). Do it this way! Metacognitive strategies in collaborative mathematical problem solving. Educational Studies in Mathematics, 30(3), 229–260. http://doi.org/10.1007/BF00304567

Gourgey, A. F. (1998). Metacognition in basic skills instruction. Instructional Science, 26(1–2), 81–96. http://doi.org/10.1023/A:1003092414893

Gourgey, A. F. (2001). Metacognition in basic skills instruction. In H. J. Hartman (Ed.),

Metacognition in Learning and Instruction (pp. 17–32). Springer Netherlands. http://doi.org/10.1007/978-94-017-2243-8_2
Guven, B., Baki, A., & Cekmez, E. (2012). Using dynamic geometry software to develop problem solving skills. Mathematics & Computer Education, 46(1), 6–17.
Hanna, G. (2001). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. Educational Studies in Mathematics, 44(1/2), 5–23. http://doi.org/10.1023/A:1012737223465
Healy, L., & Hoyles, C. (2001). Software tools for geometrical problem solving: potentials and pitfalls. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6, 235–256.
Hollingworth, R., & Mcloughlin, C. (2005). Developing the metacognitive and problem- solving skills of science students in higher education. In C. McLoughlin & A. Taji (Eds.), Teaching in the sciences: Learner-centered approaches (pp. 63–83). New York: The Haworth Press Inc.
Hoyles, C., & Jones, K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century (pp. 121–128). Dordrecht: Kluwer. Retrieved from http://eprints.soton.ac.uk/41227/
Hurme, T., & Järvelä, S. (2005). Students' Activity in Computer-Supported Collaborative Problem Solving in Mathematics. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10(1), 49–73. http://doi.org/10.1007/s10758-005-4579-3
Iranzo, N., & Fortuny, J. M. (2011). Influence of Geogebra on Problem Solving Strategies. In L. Bu & R. Schoen (Eds.), Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra (pp. 91–103). SensePublishers. http://doi.org/10.1007/978-94-6091-618-2_7
Isohätälä, J., Järvenoja, H., & Järvelä, S. (2017). Socially shared regulation of learning and participation in social interaction in collaborative learning. International Journal of Educational Research, 81, 11–24. http://doi.org/10.1016/j.ijer.2016.10.006
Jurdak, M. (2000). Technology and problem solving in mathematics: Myths and Realities. In Proceedings of the International Conference on Technology in Mathematics Education (pp. 30–37). Beirut: Lebanese American University.
Karsli, T. (2015). Relation Among Meta-Cogntition Level , Decision Making , Problem Solving and Locus of Control in a Turkish Adolescent Population. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 205, 35–42. http://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.09.008
Kilpatrick, J. (1969). Problem Solving in Mathematics. Review of Educational Research, 39(4), 523–534. http://doi.org/10.3102/00346543039004523
Kim, Y., Park, M., Moore, T., & Varma, S. (2013). Multiple levels of metacognition and their elicitation through complex problem-solving tasks. Journal of Mathematical Behavior, 32(3), 377–396. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.04.002
Koichu, B., Berman, A., & Moore, M. (2006). Patterns of Middle School Students' Heuristic Behaviors in Solving Seemingly Familiar Problems. In 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 457–464).
Koichu, B., & Leron, U. (2015). Proving as problem solving: The role of cognitive decoupling. The Journal of Mathematical Behavior, 40, 233–244. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.005
Koyuncu, I., Akyuz, D., & Cakiroglu, E. (2015). Investigating plane geometry problem-solving strategies of prospective mathematics teachers in technology and paper-and-pencil environments. International Journal of Science and Mathematics Education, 13(4), 837–862. http://doi.org/10.1007/s10763-014-9510-8
Kramarski, B., Mevarech, Z., & Arami, M. (2002). The effects of metacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks. Educational Studies in Mathematics, 49(2), 225–250.
Krummheuer, G. (1995). The Ethnography of Argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), The Emergence of Mathematical Meaning (pp. 229–270). New jersey: Lawrence Erlbaum

Associates.
Kuzle, A. (2011). Preservice teachers' patterns of metacognitive behavior during mathematics problem solving in a dynamic geometry environment. University of Georgia–Athens.
Kuzle, A. (2012). Investigating and Comunicating Technology Mathematics Problem Solving Experience of Two Preservice Teachers. Acta Didactica Napocensia, 5(1), 1–11.
Kuzle, A. (2013a). Patterns of metacognitive behavior during mathematics problem-solving in a dynamic geometry environment. International Electronic Journal of Mathematics Education, 8(1), 20–40.
Kuzle, A. (2013b). The interrelations of the cognitive and metacognitive factors with the affective factors during problem solving. In M. Pavlekovic, Z. Kolar-Begovic, & R. Kolar-Super (Eds.), Mathematics teaching for the future (pp. 250–260). Zagreb: Element.
Kuzle, A. (2015a). Nature of metacognition in a dynamic geometry enviroment. LUMAT, 3(5), 627–646.
Kuzle, A. (2015b). Problem solving as an instructional method: The use of open problems in technology problem solving instruction. LUMAT, 3(1), 69–86.
Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. Educational Studies in Mathematics, 44(1), 151–161.
Lárez, J. (2014). Las demostraciones geométricas como instancias de resolución de problemas. Paradigma, 35(2), 183–199.
Lesh, R. (2006). New Directions for Research on Mathematical Problem Solving. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (pp. 15–34).
Leung, A., & Lopez-Real, F. (2002). Theorem justification and acquisition in dynamic geometry: A case of proof by contradiction. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7(2), 145–165. http://doi.org/10.1023/A:1021195015288
Lin, X., & Sullivan, F. R. (2008). Computer contexts for supporting metacognitive learning. In J. Voogot & G. Knezek (Eds.), International handbook of information technology in primary and secondary education (pp. 281–298). Springer US. Retrieved from http://www.springerlink.com/index/k636l134641u1784.pdf
Maldonado, L. (2001). Análisis de protocolos: posibilidad metodológica para el estudio de procesos cognitivos. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
Mariotti, M. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. Educational Studies in Mathematics, 44(1–2), 25–53.
Mariotti, M. (2010). Proofs, semiotics and artefacts of information technologies. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives (pp. 169–188). Springer US. http://doi.org/10.1007/978-1-4419-0576-5_12
Marrades, R., & Gutiérrez, Á. (2001). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. Educational Studies in Mathematics, 44(1), 87–125. http://doi.org/10.1023/A:1012785106627
Mayer, R. E. (1998). Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving. Instructional Science, 26(1–2), 49–63. http://doi.org/10.1023/A:1003088013286
Mevarech, Z., & Fridkin, S. (2006). The effects of IMPROVE on mathematical knowledge, mathematical reasoning and meta-cognition. Metacognition Learning, 1(1), 85–97. http://doi.org/10.1007/s11409-006-6584-x
Moreno, L. E., & Santillán, M. A. (2004). Variation, variables and Semiotic Mediation in a Dynamical Environment. In D. E. McDougall & J. A. Ross (Eds.), Proceedings XXII- PME-

NA (pp. 223–228). Toronto.
Nunokawa, K. (2010). Proof, Mathematical Problem-Solving, and Explanation in Mathematics Teaching. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives (pp. 223–236). Springer US. http://doi.org/10.1007/978-1-4419-0576-5_15
Oner, D. (2013). Analyzing group coordination when solving geometry problems with dynamic geometry software. International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning, 8(1), 13–39. http://doi.org/10.1007/s11412-012-9161-0
Özen, D., & Köse, N. Y. (2013). Investigating Pre-service Mathematics Teachers' Geometric Problem Solving Process in Dynamic Geometry Environment. Turkish Online Journal of Qualitative Inquiry, 4(3), 61–74.
Panaoura, A. (2012). Improving problem solving ability in mathematics by using a mathematical model: A computerized approach. Computers in Human Behavior, 28(6), 2291–2297. http://doi.org/10.1016/j.chb.2012.06.036
Papleontiou-louca, E. (2003). The concept and instruction of metacognition. Teacher Development, 7(1), 9–30. http://doi.org/10.1080/13664530300200184
Perry, P., Samper, C., Camargo, L., & Molina, O. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. In Geometría Plana: un espacio de aprendizaje (pp. 11–34). Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.
Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2009). Cognitive styles, dynamic geometry and measurement performance. Educational Studies in Mathematics, 70(1), 5–26. http://doi.org/10.1007/s10649-008-9139-z
Pochulu, M. (2010). Significados atribuidos a la resolución de problemas con software de geometría dinámica durante un desarrollo profesional docente. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 13(3), 307–336.
Psycharis, S., Botsari, E., Mantas, P., & Loukeris, D. (2014). The impact of the computational inquiry based experiment on metacognitive experiences, modelling indicators and learning performance. Computers and Education, 72, 90–99. http://doi.org/10.1016/j.compedu.2013.10.001
Raes, A., Schellens, T., Wever, B. De, & Benoit, D. F. (2016). Promoting metacognitive regulation through collaborative problem solving on the web: When scripting does not work. Computers in Human Behavior, 58, 325–342. http://doi.org/10.1016/j.chb.2015.12.064
Räisänen, M., Postareff, L., & Lindblom-Ylänne, S. (2016). University students' self- and co-regulation of learning and processes of understanding: A person-oriented approach. Learning and Individual Differences, 47, 281–288. http://doi.org/10.1016/j.lindif.2016.01.006
Sanabria, L. B. (2014). Análisis de protocolos: una alternativa para investigar en ambientes de aprendizaje digital. In Á. Camargo (Ed.), Educación y Tecnologías de la Información y la Comunicación (p. 119,134). Bogotá.
Sánchez, E., Sacristán, A. I., & Mercado, M. (2004). Improving the Formulation Component of Proofs Using a Network Chat Environment in Dynamic Geometry Activities. In Annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. Balacheff). Toronto: Jones.
Sandoval, I. T., & Moreno, L. E. (2012). Tecnología digital y cognición matemática: retos para la educación. Horizontes Pedagógicos, 14(1), 21–29.
Santos-Trigo, M. (2007). Mathematical problem solving: An evolving research and practice domain. ZDM - International Journal on Mathematics Education, 39(5–6), 523–536. http://doi.org/10.1007/s11858-007-0057-9

Santos-Trigo, M., & Cristóbal-Escalante, C. (2008). Emerging High School Students' Problem Solving Trajectories Based on the Use of Dynamic Software. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 27(3), 325–340.

Schneider, W. (2010). The Development of Metacognitive Competencies. In B. Glatzeder, V. Goel, & A. Müller (Eds.), Towards a Theory of Thinking (pp. 203–214). Springer Berlin Heidelberg. http://doi.org/10.1007/978-3-642-03129-8

Schneider, W., & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. ZDM - International Journal on Mathematics Education, 42(2), 149–161. http://doi.org/10.1007/s11858-010-0240-2

Schoenfeld, A. (1981). Episodes and Executive Decisions in Mathematical Problem Solving. In Annual Meeting of the American Educational Research Association (p. 73). Los Angeles.

Schoenfeld, A. (1985). Making sense of "out loud" problem-solving protocols. The Journal of Mathematical Behavior, 4, 171–191. Retrieved from http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=psyh&AN=1986-28488-001&site=eds-live

Schoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-Making in Mathematics. In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334–370). New York: MacMillan.

Schraw, G., & Moshman, D. (1995). Metacognitive theories. Educational Psychology Review, 7(4), 351–371. http://doi.org/10.1007/BF02212307

Selden, A., & Selden, J. (2013). Proof and problem solving at university level. The Mathematics Enthusiast, 10(1), 303–334. Retrieved from http://scholarworks.umt.edu/tme/vol10/iss1/14

Silver, J. (1998). Can computers be used to teach proofs? The Mathematics Teacher, 91(8), 660–663.

Smith, R. C., Hollebrands, K. F., Iwancio, K., & Kogan, I. (2007). College Geometry Students' Uses of Technology in the Process of Constructing Arguments. In Annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Nevada.

Stillman, G. (2011). Applying Metacognitive Knowledge and Strategies in Applications and Modelling Tasks at Secondary Schoo. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo, & G. Stillman (Eds.), Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (Vol. 1, pp. 165–180). Springer Netherlands. http://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2

Stillman, G. (2014). Metacognition. In S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 445–447). London: Springer International Publishing. http://doi.org/10.1007/ 978-94-007-4978-8

Stillman, G., & Mevarech, Z. (2010). Metacognition research in mathematics education: From hot topic to mature field. ZDM - International Journal on Mathematics Education, 42(2), 145–148. http://doi.org/10.1007/s11858-010-0245-x

Valencia, N., Sanabria, L., & Ibáñez, J. (2012). Procesos cognitivos y metacognitivos en la solución de problemas de movimiento de figuras en el plano a través de ambientes computacionales. Tecné, Episteme Y Didaxis, 31(1), 45–65.

Veenman, M. V. J., Van Hout-Wolters, B. H. A. M., & Afflerbach, P. (2006). Metacognition and learning: Conceptual and methodological considerations. Metacognition and Learning, 1(1), 3–14. http://doi.org/10.1007/s11409-006-6893-0

Vincent, J. (2002). Dynamic Geometry Software and Mechanical Linkages. In D. Watson & J. Andersen (Eds.), Networking the Learner SE - 42 (pp. 423–432). Springer US. http://doi.org/10.1007/978-0-387-35596-2_42

Volet, S., Summers, M., & Thurman, J. (2009). High-level co-regulation in collaborative learning: How does it emerge and how is it sustained? Learning and Instruction, 19(2), 128–143. http://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2008.03.001

Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. Journal of Mathematical Behavior, 24(3–4), 351–360. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.005

Yimer, A., & Ellerton, N. F. (2006). Cognitive and metacognitive aspects of mathematical problem solving: An emerging model. Identities, Cultures, and Learning Spaces, (1994), 575–582.

Zheng, L., & Huang, R. (2016). The effects of sentiments and co-regulation on group performance in computer supported collaborative learning. The Internet and Higher Education, 28, 59–67. http://doi.org/10.1016/j.iheduc.2015.10.001

Zheng, L., & Yu, J. (2016). Exploring the behavioral patterns of Co-regulation in mobile computer-supported collaborative learning. Smart Learning Environments, 3(1), 1. http://doi.org/10.1186/s40561-016-0024-4

ANEXOS

En este anexo presentamos el proceso de segmentación y codificación de los otros problemas afrontados por ambos grupos. En su desarrollo se han tenido en cuenta los mismos parámetros involucrados en el capítulo seis.

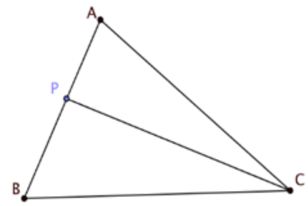
LOS TRIÁNGULOS SEPARABLES

El segundo problema propuesto solicitaba que se identificaran las condiciones del triángulo ABC, en el que un punto P pertenece al segmento AB, para que los triángulos APC y PCB sean isósceles. El grupo de Caro y Paul requirió 13 minutos en su trabajo, pero no logró dar una respuesta al mismo, mientras que el grupo de Juan y Ana demandó 49 minutos en su resolución, ofreciendo una respuesta al problema.

La propuesta de Caro y Paul

El grupo de Caro y Paul inicia su trabajo leyendo el enunciado del problema [Lectura] a la vez que Caro corrige a su compañera en los momentos en que Paul realiza una lectura inadecuada del mismo. Al finalizar la lectura y sin reflexionar sobre lo que se solicitaba, Caro pide que se dibuje el triángulo ABC [Implementación] para dar inicio al proceso de resolución.

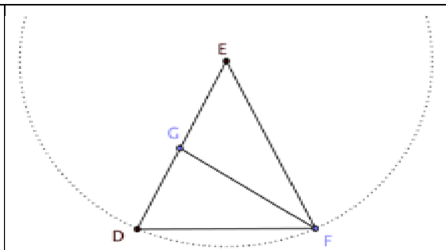
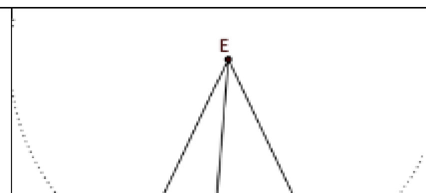
N	Est	Intervención	E	T
1	Paul	Entonces [Caro corrige la lectura cuando es necesario].	L	00:30
2	Caro	Primero construir el triángulo ABC [Paul representa gráficamente tres puntos no colineales]. Los segmentos… [para determinar el triángulo]	I	01:02
3	Inv	¿Qué es lo primero que van a hacer?		
4	Paul	Vamos a construir el triángulo sin alguna propiedad… solo para ver [nombra los puntos A, B y C].		
5	Caro	Y los puntos [Paul nombra los puntos A, B y C].		
6	Paul	Ahora, ¿qué es lo que dice? [Abre el archivo con el problema] un punto en el segmento AB… Un punto en el objeto [en Geogebra seleccionan la herramienta Punto en objeto y dibujan un punto en el segmento AB]. ¿Cómo se llama?	L	01:38
7	Caro	P.	I	01:48
8	Paul	Listo [Nombra al nuevo punto como P].		

9	Caro	Traza el segmento PC [Paul retorna al enunciado del problema], para formar los triángulos APC y PCB [Paul construye el segmento PC]. 	L	02:04
10	Paul	Listo. Ahora tenemos que… [abre el archivo del problema]		
11	Caro	Dice que, formule una conjetura sobre las propiedades del triángulo ABC que son necesarias para que esos dos triángulos que se forman sean isósceles [Paul regresa a Geogebra]. Entonces, pues toma las medidas de [los segmentos] AC, PC y BC [Paul selecciona la herramienta Distancia o Longitud]	E	02:33
12	Paul	De los segmentos, ¿sí?		
13	Caro	No, de [los segmentos] AC, PC y BC [Paul determina las tres longitudes].		
14	Paul	Listo, entonces…		

Paul menciona que van a construir inicialmente el triángulo sin alguna propiedad para observar alguna relación [2] mientras Caro controla la realización de las acciones para obtener el triángulo. Cuando han representado el triángulo en pantalla, Paul retoma el enunciado del problema [6] e identifica la condición del punto P y su ubicación en el segmento AB [Lectura], regresa a Geogebra y construye dicho punto [Implementación]. Al final regresa al enunciado del problema, para revisar las condiciones del mismo [Lectura], mientras que Caro le sugiere construir el segmento PC para determinar los triángulos APC y PCB [9]. Paul realiza esto en Geogebra y regresa al enunciado del problema, a la vez que Caro lee el apartado en que se presenta lo que el problema solicita. Al regresar a Geogebra Caro le pide a Paul determinar las longitudes de los segmentos AP, PC y BC para observar alguna relación [Exploración], posiblemente a través del arrastre de los vértices del triángulo.

15	Caro	¿Qué condiciones tiene que tener P para que esos dos triángulos sean isósceles?	C	03:10
16	Inv	¿A qué triángulos te refieres?		
17	Caro	Al triángulo ACP y el triángulo PBC.		
18	Paul	¿Y si fuera equilátero? el grande [triángulo ABC], saldría rápido, bueno, no.	A	03:26
19	Caro	¿Equilátero?, yo tengo una…, de pronto si el triángulo ABC es isósceles, pero pues obvio con AB y BC [segmentos] congruentes.		
20	Paul	Pues hagamos un equilátero… [desplaza la pantalla para poder construirlo]	P	03:40
21	Caro	Un isósceles.		
22	Paul	Eso, un isósceles.		

Con base en lo realizado, Caro reformula el problema en términos sencillos [Comprensión], resaltando las condiciones dadas en este [15]. En el contexto en el que se encuentran inmersos los estudiantes, Paul cuestiona la posibilidad de que el triángulo ABC deba ser equilátero [Análisis], pero Caro no da desarrollo a esta idea y antepone sus ideas [19, 21], contemplado que el triángulo ABC sea isósceles. Paul propone construir un triángulo equilátero [Planeación] pero Caro pide que este sea isósceles.

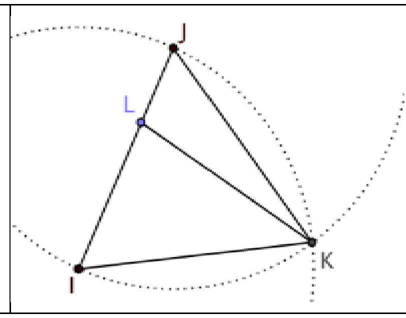
[Paul construye un segmento ED, una circunferencia con centro E y radio ED y un punto F sobre la misma circunferencia, distinto a D. Al final oculta la circunferencia y construye el triángulo DEF]				
23	Paul	Listo, ahora… [ubica un punto en el segmento ED, llamado G, y construye el segmento GF]		
24	Inv	¿Qué estás haciendo ahí? ¿En todo lo que hiciste?		
25	Paul	Entonces hicimos, construimos un triángulo isósceles y pues, bueno, también hicimos un punto para ver si de una vez nos salen los triángulos más pequeñitos congruentes, eh, isósceles. 		
26	Caro	Pero, ¿qué te iba a decir?, es que creo que G no debería ir ahí. G debería ir, bueno, o sea, en este caso G sería el punto P, debería ir es en el segmento que no es congruente con los otros dos… para que se cumpla [la condición solicitada].		
27	Paul	Listo [borra el punto G y en consecuencia el segmento GF].	I	03:44
28	Caro	O sea, G tendría que estar en DF.		
29	Paul	Aquí, ¿cierto? [Ubica el punto G en el segmento DF] ah claro [construye el segmento GE]. 		
30	Caro	Ahora toma medidas [Paul determina las medidas de los segmentos ED, EG y EF].		
31	Paul	Mmm, no creo porque como este punto [G] está libre, entonces no necesariamente… puede pasar esto [arrastra el punto G sobre el segmento DF]		
32	Caro	Mmm, buen punto. No, y no se cumple, no es isósceles.		
33	Paul	Yo creo que, se cumpliría si ese punto G coincidiera con el punto medio de…		
34	Caro	¿De qué?		

35	Paul	Ah no. No funciona.		
36	Inv	¿Cómo Paul?		
37	Paul	Es que estaba pensando que si G cayera en el punto medio se cumpliría, pero no. No, porque… [Caro comparte su negativa] estaría diciendo que en un triángulo rectángulo los lados son iguales…		
38	Caro	Sí, exacto. Ahora, pues coloca el punto como lo habías colocado en un lado congruente a ver si de pronto ahí si se cumple [Paul coloca un punto H sobre el segmento ED y construye el segmento HF, toma además su longitud]. No [con la cabeza rechaza al ver las medidas]. Ahora has un equilátero [sobre el triángulo construido no se realiza alguna otra acción], triángulo equilátero [Paul desplaza la pantalla para realizar la construcción].	P I P	05:54 06:02 06:16

Paul da inicio a la construcción de un triángulo isósceles llamado DEF utilizando una circunferencia y apoyándose en la congruencia de sus radios [Implementación], ubica un punto llamado G en el segmento ED y construye el segmento FG, manifestando que el objetivo de esa construcción es observar si los triángulos FGE y GDF son isósceles. Caro, observando la representación hecha en pantalla, propone [26] que el punto G sea ubicado en el segmento DF, que no es congruente a los otros lados del triángulo. Paul procede a modificar la posición del punto G y construye ahora el segmento EG [29], también determina las longitudes de los segmentos ED, EG y EF. Ante el panorama presentado en pantalla, Paul manifiesta que posiblemente los triángulos EDG y EGF no sean isósceles dado que el punto G se puede mover a lo largo del segmento DF [31], pero que posiblemente esto sí se cumpla si G es punto medio el segmento DF [33], aunque no tiene mucha seguridad de esto. Observando la pantalla, Paul rechaza esta posibilidad indicando que al asumirla como verdadera, estaría diciendo que en los triángulos rectángulos tienen lados congruentes (refiriéndose al cateto e hipotenusa de los triángulos rectángulos) [38].

Caro comparte este resultado y solicita que ahora el punto G sea ubicado nuevamente en el segmento ED [Planeación], uno de los lados congruentes en el triángulo EDF. Una vez Paul realiza esto [Implementación] y determina las longitudes de los segmentos EF, HF y DF, estas no muestran valores iguales, ante lo que ambos estudiantes rechazan esta posibilidad de inmediato. Al final, Caro propone [Planeación] construir un triángulo equilátero, idea propuesta por Paul en un momento inicial, que es desarrollada por Paul [Implementación].

39	[Paul construye el segmento IJ, la circunferencia con centro J y radio IJ]		I	06:24
40	Caro	Has otra circunferencia con centro I radio IJ… y el punto de intersección.		
41	[Paul construye esta circunferencia y un punto de intersección entre las dos circunferencias			

	llamado K. Determina finalmente el triángulo IJK, el cual es equilátero, y oculta las circunferencias]			
42	Paul	Ahora un punto [ubica un punto L en el segmento IJ y construye el segmento KL] 		
43	Caro	Ahora… [Paul determina las longitudes de los segmentos JK, LK y KI] no. No se cumple. Es que creo, creo que yo tengo una conjetura. Creo que eso solo se cumple si ese punto P, o sea, digamos, volvamos al primer triángulo [Paul enfoca en pantalla el primer triángulo construido], si ese punto P, bueno, dado el caso de que [el triángulo] ABC sea isósceles, ese punto P tendría que ser B o tendría que ser A. Para que se cumpliera… [Paul arrastra el punto P para que coincida con el punto A] Bueno, en ese caso no, porque ese no es isósceles [la configuración del triángulo ABC no corresponde a isósceles]. Mueve B para que…	A	7:43
44	Paul	O sea en este [Paul enfoca la pantalla en el segundo triángulo construido, el cual es isósceles] que es isósceles.		
45	Caro	Ujum, ese sí es isósceles [Paul mueve el punto H para que coincida con el punto E]. Pero pues obvio, ese punto, el punto P, tienen que estar en el lado que no es congruente [DF]. O sea, es G, en este caso sería G [Paul construye el segmento EG]. O sea, ese punto tendría que ser, en este caso, D o F para que se cumpliera.	V	08:08
46	Paul	Um, sí [arrastra el punto G sobre el segmento DF]. Pues porque es isósceles [el triángulo DEF].		

Paul y Caro inician la construcción del triángulo IJK equilátero y cuando cuentan con este, Paul ubica un punto llamado L en el segmento IJ y determina el segmento LK, así como las longitudes de los segmentos JK, LK e IK. Los valores mostrados en pantalla llevan a que Caro rechace esta posibilidad y proponga una posible conjetura. Según ella, si el triángulo ABC es isósceles, los triángulos APC y PCB serán isósceles cuando P sea A o B [43]. Paul retoma la construcción del triángulo DEF isósceles, donde el punto G pertenece al segmento DF, el cual no es congruente a los otros lados, para verificar esta idea [Verificación]. Caro menciona que en ese caso el punto G debería ser D o F para que se cumpla lo que el problema propone. Paul arrastra a G hasta esas posiciones y acepta esta propuesta mencionando que es coherente en tanto el triángulo EDF es isósceles.

47	Caro	Pues es que eso es por… por… ¿ángulos desiguales - lados desiguales? ¿Es por eso?, o sea, digamos, pues en este triángulo…	A	08:55

48	Paul	Pero no podría, pues porque son el mismo punto y ya.		
49	Caro	Pues sí, pero por qué, digamos, en los otros triángulos no se cumple.		
50	Paul	Pero en el equilátero también se cumple.		
51	Caro	Bueno sí, pero digo, pero en el caso en el que G sea D o sea F. Pero porque si es algún punto entre D y F, no se cumple. Es porque digamos este ángulo nunca va a ser congruente con este.		
52	Paul	Sí…		
53	Caro	Igual, este… exacto, y como no van a ser congruentes, pues este lado no va a ser congruente con este, por eso jamás se va a… formar un isósceles a excepción que sea D o F, en el caso de que sea un triángulo isósceles [EDF].		
54	Paul	Eso también se podría justificar por el ángulo externo, ¿cierto?		
55	Caro	Ujum, es por eso…		
56	Paul	Que este es mayor a este… entonces… umm sí.		
57	Inv	¿Cómo es lo del ángulo externo?		
58	Paul	Este ángulo, el ángulo EGF es mayor que el ángulo EDG, ¿si es así?		
59	Caro	Sí		
60	Paul	Es que no me acuerdo. Sí, ese es el teorema del ángulo externo.		
61	Inv	Pero, ¿eso para justificar qué?		
62	Paul	Que no se puede, o sea… digamos en este caso [se apoya en la representación gráfica de abajo], no se pueden tener dos ángulos congruentes, o sea, como hay un teorema que dice que si es isósceles debe tener dos ángulos congruentes, bueno, los opuestos a los lados…		
63	Caro	A los lados congruentes, tienen que ser congruentes [los ángulos]…		
64	Paul	Bueno, entonces pues por eso no se podría que estuviera entre el segmento [G entre D y F], sino que el punto tendría que coincidir con el extremo de los segmentos.		
65	Caro	Con algún extremo de, digamos de los lados, del segmento que no es congruente con los otros dos… en el isósceles. Pues por lo que dice Paul, digamos, como el ángulo EGF es el ángulo externo del triángulo EGD, entonces ese ángulo nunca va a ser congruente con EDG. Ese [EGF] siempre va a ser mayor [a EGD]. Entonces por eso nunca se va a cumplir de que ese ángulo, que esos dos ángulos sean congruentes, por ende, esos dos triángulos nunca van a ser isósceles. Porque tendría que cumplirse que el ángulo EGF sea congruente con ¿con cuál? con EDG para que se cumpla que, o sea para que se cumpla y para que el lado EG sea congruente con ED y con EF.	V	10:42
66	Paul	Sí, es por eso.		

El trabajo realizado los ha llevado a reconocer una condición para el punto P, aunque esta no se corresponde con lo solicitado y los estudiantes no se han dado cuenta de ello. Caro, con base en una de las construcciones realizadas, intenta proveer una justificación al hecho de que G no pueda estar entre D y F para que los triángulos sean isósceles [Análisis] argumentando que, bajo ese supuesto, no se pueden obtener ángulos congruentes y en consecuencia lados congruentes (requisito para poder determinar triángulos isósceles). Por este motivo G debe ser, de acuerdo a Caro, D o F [53]. Paul apoya este resultado y provee también algunos hechos geométricos que permitan respaldarlo. Para él, tener un triángulo isósceles requiere tener de antemano un par de ángulos congruentes, pero dada la configuración en la que G está entre D y F y apoyándose en las propiedades del ángulo externo, no se puede establecer congruencia alguna. Caro está de acuerdo con esta idea y repite los argumentos expuestos por su compañero [Verificación].

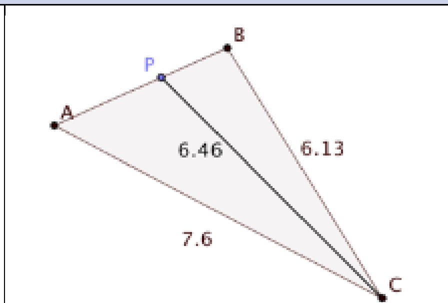
67	Caro	Entonces solamente, las condiciones de ese punto P es que sea o A o sea B para que los triángulos que se formen sean congruentes… sean isósceles.	S	11:30
68	Paul	[Arrastra el punto P sobre el segmento AB] No, es que no, bueno, sí.		
69	Caro	Es que ese [triángulo ABC] no es isósceles.		
70	Paul	No, sí… es por eso. De acuerdo [abre el archivo de la tarea y lee mentalmente]. Entonces, no pues, como propiedades el triángulo [ABC] tendría que ser isósceles.	L	11:53
71	Caro	¿Ah?		
72	Paul	Bueno, tendría que ser isósceles. O sea, para que se cumpla tiene que ser al menos isósceles…	S	12:05
73	Caro	El triángulo tiene que ser isósceles y P tiene que ser A o B, para que se cumpla [Paul abre de nuevo el archivo Geogebra].		
74	Paul	Sí, es eso.		12:28

Al final Caro retoma la idea de que la única posibilidad para que los triángulos APC y PCB sean isósceles es que el punto P coincida con A o B [Síntesis], idea compartida por Paul. Paul regresa al enunciado del problema [Lectura], lee mentalmente por un momento y menciona que la propiedad que el triángulo ABC debe cumplir es que este sea isósceles [Síntesis], Caro la interrumpe y señala que en primer lugar el triángulo ABC debe ser isósceles y que además el punto P debe ser el mismo punto A o B. El grupo finaliza en este punto el trabajo realizado, aunque desafortunadamente no logra encontrar una respuesta adecuada al problema planteado.

La propuesta de Ana y Juan

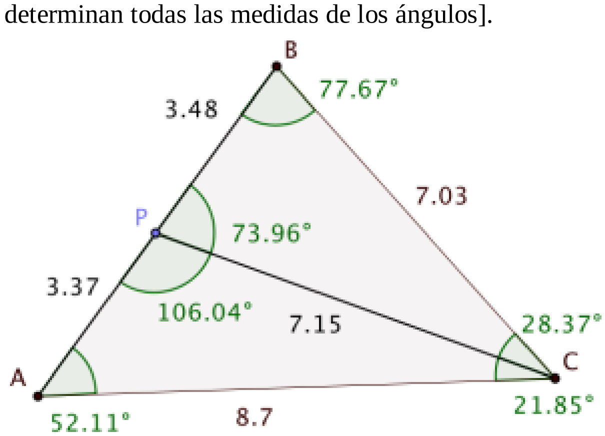
El trabajo desarrollado por este grupo inicia con una lectura, por parte de Juan, del enunciado del problema [Lectura], representando en Geogebra progresivamente los elementos involucrados en el problema por solicitud de Ana [Planeación].

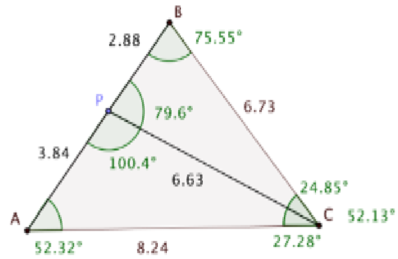
1	Juan	[Lee la primera parte del enunciado]	L	00:09

2	Ana	¿Lo vamos haciendo?	P	00:17
3	Juan	Sí [Ana construye en Geogebra el triángulo ABC y ubica el punto P en el segmento AB]. Y los triángulos APC y PCB.	I	00:19
4	Ana	[Determina el triángulo APC] Y este ¿sí? [Refiriéndose al segundo triángulo. Vuelve al enunciado del problema y verifica]	L	00:44
5	Juan	PCB [Ana determina el triángulo PCB]. Listo. Formule una conjetura sobre las propiedades del triángulo ABC que son necesarias para que los triángulos APC y CPB sean isósceles… justifique sus conjeturas.		
6	Ana	¿Le damos valor? [longitudes de los lados]	P	01:45
7	Juan	Sí [Ana determina las longitudes de los segmentos determinados en la construcción].	I	01:48
8	Inv	¿Para qué les dan valor?		
9	Ana	Para ver si, o sea, que esos dos lados sean congruentes [señala los segmentos AC y PC con el mouse], para que sean isósceles.		
10	Juan	Déjame ver una cosa [regresa al texto del problema]… sobre las propiedades del triángulo ABC que son necesarias para que los triángulos APC y PCB sean isósceles. Supongo que es a la vez, ¿cierto? al mismo tiempo.	L C	02:31 02:41
11	Ana	Sí [observan la construcción en Geogebra]. Movamos el triángulo [inicia a arrastrar el punto B]. 	P I	03:15 03:17
12	Inv	¿Qué piensan?		
13	Juan	Estaba pensando que, si se puede a la vez que sean triángulos isósceles y al parecer no, no es posible. Para que ambos a la vez sean isósceles… Ah, al menos que, es que no especifica qué lados tiene congruentes. Entonces puede ser este, el lado PB con PC y PC con AC. No necesariamente tiene que ser AC, PC y BC los…	C	03:49

En Geogebra Ana representa [Implementación] el triángulo ABC y ubica un punto llamado P en el segmento AB [3]. Juan retoma el enunciado del problema y lee la siguiente parte del mismo [Lectura], donde se mencionan los triángulos APC y PCB, Ana en Geogebra traza el segmento PC [Implementación]. Finalmente, Juan lee la última parte del enunciado [Lectura], donde se presenta lo que el problema solicita [5]. Ana considera la posibilidad de determinar las longitudes de los segmentos involucrados [Planeación], idea que es aceptada por Juan, y posteriormente ejecutada por Ana en Geogebra [Implementación]. Para Ana el objetivo de realizar esto es observar si los lados son congruentes y con ello obtienen triángulos isósceles [9].

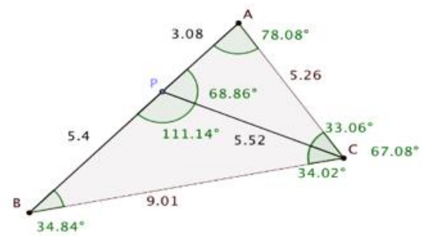
Juan retorna al enunciado del problema [Lectura] y enfatiza en la parte que establece los requerimientos del problema, considerando que allí se solicita que simultáneamente ambos triángulos deben ser isósceles [Comprensión]. Al regresar a Geogebra, Ana propone manipular los vértices del triángulo [Planeación] e inicia a realizar esto [Implementación], sin embargo, para Juan no es viable que los dos triángulos sean simultáneamente isósceles. Al cabo de unos segundos Juan considera la posibilidad de que los lados congruentes no sean AC, PC y BC, dado que el enunciado del problema no define qué lados de los triángulos deben ser congruentes [Comprensión].

<table>
<tr><td>14</td><td>Ana</td><td>Entonces, ¿cuáles ponemos?</td><td>P</td><td>04:06</td></tr>
<tr><td>15</td><td>Juan</td><td>Entonces… [Ana determina las longitudes de los segmentos AP y PB] sí [inicia a arrastrar el punto B].</td><td rowspan="2">E</td><td rowspan="2">04:26</td></tr>
<tr><td>16</td><td>Ana</td><td>Mueve a [punto] A [arrastra el punto A y P].</td></tr>
<tr><td>17</td><td>Inv</td><td>¿Qué piensan? [Juan observa el enunciado del problema]</td><td>L</td><td>05:23</td></tr>
<tr><td>18</td><td>Juan</td><td>Sí, tienen que ser al mismo tiempo, entonces… [Regresa a Geogebra y arrastra al punto P] lo que pasa es que el lado AC siempre va a ser mayor a los…, mentiras.</td><td rowspan="3">C</td><td rowspan="3">05:34</td></tr>
<tr><td>19</td><td>Ana</td><td>¿No debe tener un ángulo recto? común a los puntos, no estoy segura.</td></tr>
<tr><td>20</td><td>Juan</td><td>¿Cuál?</td></tr>
<tr><td>21</td><td>Ana</td><td>Ay, no sé. Intenta mover… ¿Le damos nombre?</td><td>P</td><td>06:35</td></tr>
<tr><td>22</td><td>Juan</td><td>Sí, marca los ángulos [Ana determina las medidas de los ángulos]. Entonces, una manera es que el ángulo B sea…</td><td rowspan="5">A</td><td rowspan="5">06:54</td></tr>
<tr><td>23</td><td>Ana</td><td>¿Congruente a este…? [con el mouse señala el ángulo PCB]</td></tr>
<tr><td>24</td><td>Juan</td><td>Sí. Congruente al ángulo PCB. Porque, al parecer el…</td></tr>
<tr><td>25</td><td>Ana</td><td>Eh, como que va a ser bisectriz, ¿no? este segmento [PC, del ángulo ACB], no estoy segura.</td></tr>
<tr><td>26</td><td>Juan</td><td>Te faltó marcar el otro ángulo para ver si lo que tú dices… es bisectriz [se determinan todas las medidas de los ángulos].

</td></tr>
</table>

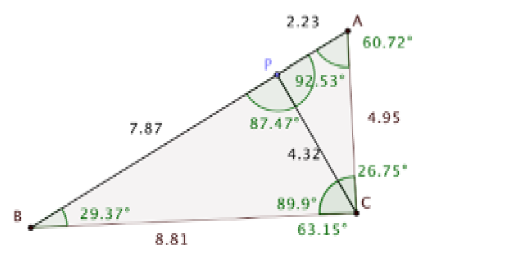
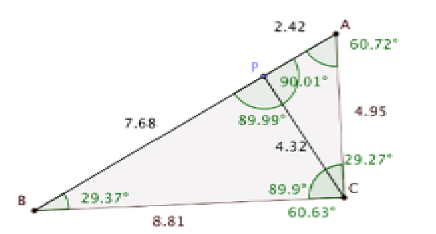
27	Inv	¿Qué van a hacer ahí?		
28	Juan	Eh, queremos buscar que el ángulo PCB sea congruente al ángulo B, para poder justificar que por hecho geométrico el segmento BC y PC sean congruentes. Estás cerca [Ana ha arrastrado el punto P tratando de obtener algún triángulo isósceles, aunque es el triángulo ABC el que se está convirtiendo en isósceles]. Pero no parece [Juan piensa que el triángulo PAC debería ser isósceles ya que confunde la medida del ángulo BCA con la del ángulo PCA]. 	P I	08:02 08:25
29	Ana	No.		
30	Juan	¿Por qué? Este ángulo [valor numérico de la medida del ángulo ACB] es todo, ¿cierto?		
31	Ana	Sí.		
32	Juan	No la idea es que sea BCP, BCP es el que tiene que ser congruente [Ana arrastra el punto P y lo hace coincidir con A].	P	08:51
33	Ana	P tendría que estar acá [coincidir con A]. No serviría.	I	09:01

En este punto Ana modifica el plan trazado previamente [Planeación] y determina también las longitudes de los segmentos AP y PB, luego de ello inicia a arrastrar al punto B y al punto A por la pantalla [15] tratando de convertir los triángulos ACP y PBC en isósceles [Exploración]. Juan retorna al problema [17] y lee mentalmente este [Lectura], manifestando con seguridad que son los dos triángulos quienes deben ser isósceles [Comprensión]. Como respuesta al comentario de Juan, Ana hace una propuesta [19] que no es muy clara y que se reduce a proponer arrastrar algunos puntos [21] cuando Juan le pide mayor claridad sobre su idea [Planeación]. Como Ana no provee una explicación de su propuesta, Juan contempla la posibilidad [22, 24] de que los ángulos ABC y BCP sean congruentes [Análisis], lo que llevaría [28] a que los segmentos PB y PC sean congruentes [Planeación]. Ana arrastra los vértices del triángulo buscando esta relación [implementación] sin darse cuenta que los ángulos que ha configurado para que sean congruentes son ABC y BCA, Juan se percata de esto y hace que retome sus acciones [Planeación] en conformidad a lo que había considerado anteriormente [32] y cuando Ana arrastra el punto P [Implementación] para lograr esto, se da cuenta que P coincide con el punto A, lo que la lleva a rechazar tal posibilidad de inmediato [33].

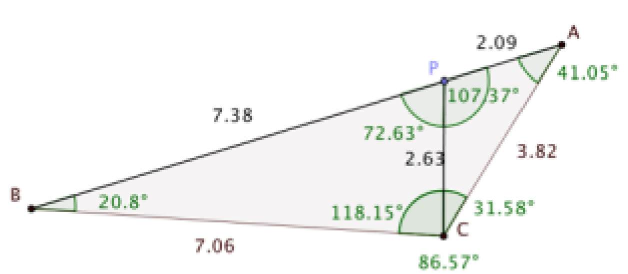
34	Juan	[Arrastra el punto C] Sí, siempre va a ser [regresan al enunciado del problema y	L	09:42

		luego a Geogebra].	E	09:48
35	Inv	¿Qué piensan ahora? [arrastran los puntos buscando distintas configuraciones]		
36	Juan	Este ya está cerca de ser isósceles [triángulo APC] y… Pues ya por lo menos el triángulo BPC es isósceles y el otro está cerca de serlo. Pero no… Mira, el triángulo APC, los lados congruentes podrían ser estos [señala con el mouse los lados AC y PC] y en el otro triángulo PCB podrían ser estos [señala con el mouse los segmentos CP y PB]. Para que sean a la vez… 		
37	Ana	Um, y el ángulo [señala con el mouse el ángulo ACP]…	P	12:23
38	Juan	Tocaría medir…		
39	Ana	Cuadra el ángulo, ¿no? dices que estos dos, ¿no? [refiriéndose a que los ángulos APC y PAC no son congruentes]		
40	Juan	Sí, podría ser [arrastra el punto P buscando la congruencia entre los ángulos señalados]. Ya disminuye [su intento provoca que algunos valores se ajusten a lo requerido mientras que otros se desajusten], va disminuyendo este lado.	I	13:08
41	Ana	Acá no son congruentes [señala con el mouse los ángulos PAC y APC]		
42	Juan	Y si este [P al acercarse al punto B] baja, ¿qué pasa con este ángulo?		
43	Ana	¿Este? [arrastra el punto P acercándolo a B]		
44	Juan	Disminuye [la medida del ángulo APC], y se aleja este. Entonces, pues como dice que tiene que ser una… [Vuelve a leer el enunciado del problema]. Empecemos a probar con el triángulo ABC, que sea un triángulo con una característica, por ejemplo, que sea digamos…	L	14:16
45	Ana	Digamos cojamos este que sea recto [señala el ángulo ACB].	P	14:25

Ambos retornan al enunciado del problema [Lectura], leen mentalmente este y retornan a Geogebra, donde arrastran los vértices buscando alguna configuración que atienda a lo solicitado en el problema [Exploración]. Esto lleva a que Juan reconozca que están cerca de obtener los triángulos isósceles, posterior a ello propone que consideren que una posibilidad es que los lados congruentes sean AC y CP en el triángulo APC, mientras que en el triángulo PCB los lados congruentes serían PB y PC [Planeación]. Como respuesta, Ana le sugiere hacer que los ángulos opuestos a estos lados en cada triángulo sean congruentes mientras que arrastra algunos vértices tratando de lograr esto [Implementación] sin éxito alguno ya que intentar que un par de ángulos sea congruente lleva a que el otro par deje de serlo. Juan retoma nuevamente el enunciado del problema y lo lee mentalmente [Lectura], al final propone [Planeación] considerar triángulos con características especiales [44], a lo que Ana propone considerar en primer lugar uno rectángulo donde el ángulo recto sea ACB [45].

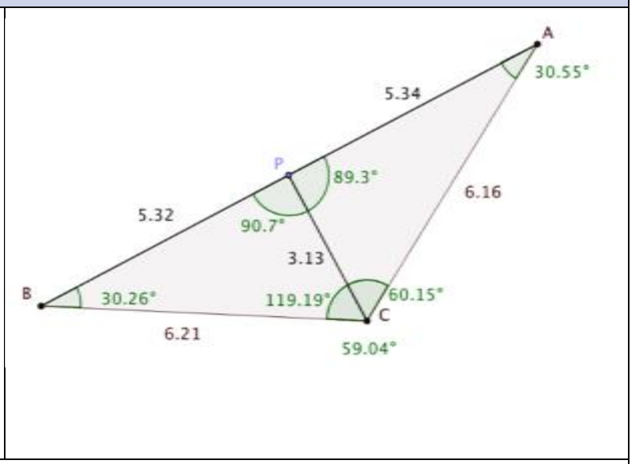
46	Juan	Que sea recto, sí puede ser, y después que sea equilátero [Ana arrastra los vértices del triángulo hasta que el ángulo ACB es recto]. Ahí. Entonces posiblemente estos dos…			
47	Ana	¿Cuáles?			
48	Juan	Ya no… ah sí, que este ángulo sea igual a este [ángulos BPC y PCB].			
49	Ana	¿Este?		I	14:43
50	Juan	Sí [Ana arrastra el punto P hasta que el ángulo BPC se aproxima a 90]. Listo, con ese…			
51	Ana	¿Ese lado cuánto mide? [señala con el mouse el segmento BC]			
52	Juan	No, estos lados son diferentes [longitudes de los segmentos PB y BC].			
53	Ana	Voy a medir este lado [BC].			
54	Juan	Tienen que medir igual porque ya los ángulos son… Ah no, mentiras, el ángulo es todo [descubre que la medida del ángulo PCA no es 89.9 y este valor es del ángulo ACB]. Entonces que sea un triángulo equilátero [Ana arrastra los puntos para que el triángulo ABC sea equilátero a partir de las medidas de sus lados].		P	15:37
55	Ana	Um, creo que ahí [ahora arrastra el punto P y hace que coincida con el punto medio del segmento AB].		I	15:43
56	Juan	Déjalo ahí. No, ¿cierto? [no se observan triángulos isósceles]			

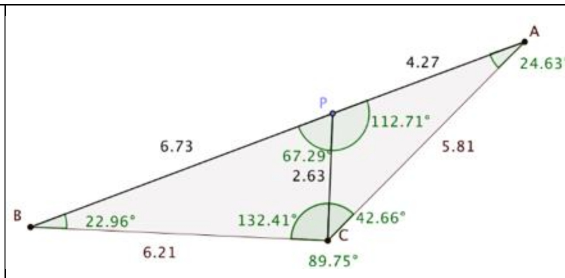
Ana manipula el triángulo ABC hasta lograr que el ángulo ACB sea recto [Implementación] y luego arrastra al punto P buscando la congruencia entre los ángulos sin éxito dado que el triángulo es escaleno. Al final, Juan propone [Planeación] convertir el triángulo ABC en uno equilátero [54] y Ana realiza esto manipulando sus vértices [Implementación]. Al configurar el triángulo como uno equilátero, su primera impresión es que la propiedad no se satisface [56].

57	Ana	No, no [observan la pantalla. Arrastra el punto P sobre el segmento AB].	E	16:59
58	Inv	¿Qué haces Ana?		
59	Ana	Tratando de mirar…		
60	Inv	¿Algún caso especial?		
61	Ana	Sí, con ese, el del equilátero, pero no…		
62	Inv	Juan, ¿qué estaba haciendo en la hoja?		
63	Juan	Es que… tratando de… lo que pasa es que pareciera que el lado PC… espera, baja el punto A… [arrastran el punto A por distintas posiciones]		
64	Inv	¿Qué está intentando Juan?		
65	Juan	Es que estaba pensando que, como el segmento PC, por decirlo así, bueno, P está en el interior del ángulo BCA, entonces, si el ángulo BCA es agudo, eh, pues el ángulo ABC también tiene que ser agudo. Pero el segmento PC, como P está en el interior, entonces, hace más pequeño el ángulo. Entonces no da la posibilidad de que BP sea congruente a PC. Eso estaba pensando, entonces al parecer tiene que ser ese ángulo obtuso [BCA]. ¿Cierto?		
66	Ana	Um [Juan arrastra el punto P tratando de que el triángulo PBC sea isósceles].		
67	Juan	Está cerca [el triángulo PBC tiene congruentes los lados PB y PC, pero en el triángulo APC no se tienen alguna congruencia].		
68	Inv	¿Qué intenta Juan?		
69	Juan	Estaba intentando…		
70	Ana	Pero mira que está cerca [señala que las medidas de los ángulos APC y PAC son cercanas, 37.87 y 34.73 respectivamente].		
71	Juan	Sí [Ana arrastra el punto A y logra que los ángulos PAC y APC sean congruentes]. Pero el otro se pasa por un poco… [los lados PB y PC, que eran congruentes, ya no lo son]		
72	Ana	Um [Arrastra el punto P hacia A y se detiene en el siguiente lugar]. 		
73	Juan	¿Está cerca? o es mi impresión. 2.09 y 2.63… [Longitudes de PA y PC]… Pensé que de pronto PC tenía que ser perpendicular a BC y el triángulo… hay un ángulo obtuso.		
74	Ana	Estos también están cerca [longitudes de PB y BC] y los ángulos también [BPC y PCB], mira.		

75	Juan	Entonces, el triángulo ABC… [dibuja en una hoja]		
76	Inv	¿Qué intenta Juan?		
77	Juan	Tratando de mirar si es posible que el triángulo tenga que ser, tener un ángulo obtuso y además que PC, pues… ¿la pregunta es solo con el triángulo? [regresa al enunciado del problema] ¿Qué propiedades del triángulo ABC…?	L	23:31

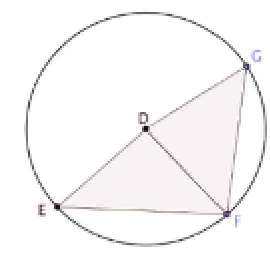
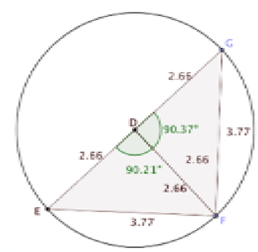
Posteriormente, Ana arrastra a P por el segmento AB [Exploración] buscando una configuración que se ajuste a lo solicitado sin mayor éxito [61]. Juan y Ana manipulan los vértices del triángulo y logran aproximarse a una configuración en la que los lados PC y CA son congruentes, aunque en el otro triángulo esta relación no se cumple. Algunas ideas o configuraciones son contempladas, pero al tratar de representarlas se evidencia que lograr que una pareja de lados sea congruente implica que la otra pareja de lados deje de serla [71]. Esto lleva a Juan a retomar el problema [77] y leer algunos apartados del mismo [Lectura].

78	Ana	¿Y por qué estos dos no sean congruentes? [ángulos ABC y BAC] ¿Se daña?		P	23:59
79	Juan	Si es un isósceles, sería BC congruente a AC [Ana arrastra los puntos ABC y hace que el triángulo determinados por ellos sea isósceles con AC congruente a BC] y… entonces ya… [Ana aproxima los valores de las medidas de los ángulos] déjalo ahí, está cerca…			
80	Ana	Que este sea como la altura, ¿no? [siendo BC y AC congruentes, hace que CP se convierta en altura del triángulo ABC]		I	24:18
81	Juan	Ya se aleja otra vez…			
82	Ana	Mira, estos dos son congruentes [BP y PA]			
83	Juan	¿Cuáles?			
84	Ana	BP y PA			
85	Juan	Pero, esos no me sirven.			
86	Ana	Pero P es el punto medio, ¿no?			

87	Juan	Mmm, no, necesito que sea… esto [arrastra el punto P para que PB y BC sean congruentes, así como PA y PC se aproximen también a esta relación]. Está cerca. No nos sirve con el que sea isósceles, ¿no? pues con un ángulo obtuso. Con un ángulo agudo tampoco por lo mismo… que el ángulo PCB va a ser menor a PBC [arrastra el punto A hasta obtener la siguiente configuración].			

De regreso a Geogebra, Ana propone que los ángulos BAC y ABC sean congruentes [Planeación] e inicia a arrastrar los puntos A B y C para lograr esto [Implementación]. Posteriormente arrastra al punto P hasta que coincide con el punto medio del segmento AB [86], mencionándole a Juan que el segmento PC debería ser la altura del vértice C y le indica a Juan que los segmentos BP y PA son congruentes. Esta idea es rechazada por Juan [87], dado que estos lados no permiten obtener un triángulo isósceles. Ambos estudiantes continúan arrastrando los puntos sin alcanzar su objetivo.

91	Ana	[Observa la pantalla y arrastra algunos puntos] ¿Y si construimos los isósceles? ¿si construimos primero los isósceles? [Juan arrastra nuevamente los puntos buscando una configuración en la que los triángulos sean isósceles]	P	27:20
92	Inv	¿Qué intenta Juan?	E	27:56
93	Juan	Acomodar los lados para que sean congruentes. Pareciera que no se puede construir, tengo la impresión de que el segmento PC, bueno P al moverse… siempre va, pareciera que siempre va a ser más pequeño que BC y CA. Entonces, pues primero no podría ser congruente con CA ni con BC y lo otro es que… sí, no puede ser congruente con AC ni con BC, entonces le queda la posibilidad de que sea la combinación, o sea, que sea PA con PC y PB con PC. Estamos buscando ese caso, pero tampoco se da [dibuja en la hoja un triángulo rectángulo isósceles]. A menos que… un triángulo rectángulo isósceles [lee el enunciado del problema]. La opción que tú dices de hacer primero los triángulos isósceles ¿y tratar de moverlos? a ver si forman un triángulo… [Ana construye en otro lugar una circunferencia con centro D y radio DE, ubica un punto F sobre la circunferencia y construye el triángulo DEF, luego mueve el mouse describiendo un radio de esa circunferencia que en conjunto con el segmento ED determinarían un diámetro]	L P I	30:30 31:30 31:47
94	Inv	¿Qué intentas hacer?		

<table>
<tr><td>95</td><td>Ana</td><td>Dos triángulos isósceles y pues mirar a ver qué condición debe tener el triángulo que tiene dentro los dos triángulos para que… [construye un segundo triángulo]</td><td>
</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>96</td><td>Juan</td><td colspan="2">Creo que se puede dar un caso… cuando son rectángulos isósceles, esta mira… [le señala la hoja]</td></tr>
<tr><td>97</td><td>Ana</td><td colspan="2">Que este sea recto [con el mouse le señala el ángulo GDF y EDF] ¿sí?</td><td rowspan="2">P</td><td rowspan="2">33:11</td></tr>
<tr><td>98</td><td>Juan</td><td colspan="2">Sí, pero… hagámoslo con medidas… sí, exacto, que este sea recto [señala los mismos ángulos].</td></tr>
<tr><td>99</td><td>Ana</td><td>Ouch [toma las medidas de los ángulos señalados y arrastra los puntos G y E para que las medidas den 90].</td><td>
</td><td rowspan="3">I</td><td rowspan="3">33:27</td></tr>
<tr><td>100</td><td>Juan</td><td colspan="2">Sí, que sean rectos, pareciera que tienen que ser… triángulo recto isósceles [Ana determina la medida del ángulo GFE]. Entonces… que el triángulo fuera isósceles, el ABC y que PC sea la altura.</td></tr>
<tr><td>101</td><td>Ana</td><td colspan="2">Ujum…</td></tr>
</table>

De repente Ana propone [Planeación] construir los triángulos isósceles desde el inicio [91], pero esta es ignorada por Juan, quien inicia a arrastrar [Exploración] los vértices nuevamente tratando de lograr que los dos triángulos sean isósceles a partir de la congruencia de sus lados [93]. Juan reconoce que algunas configuraciones o parejas de lados congruentes no se pueden lograr, basado en la experiencia que ha tenido, lo que lo lleva a contemplar otras posibles parejas de lados que sean congruentes, en particular, menciona que las parejas de lados congruentes podrían ser PA con PC y PC con PB, aunque también señala que esta configuración no se ha podido establecer. Juan dibuja en una hoja de papel un triángulo rectángulo isósceles y retoma el enunciado del problema [Lectura] donde realiza una lectura mental, luego regresa a Geogebra y cuestiona a Ana por su idea, la que anteriormente había ignorado [Planeación].

Ana inicia a construir [Implementación] en pantalla una circunferencia con centro en D y los puntos E y F sobre esta, luego construye en triángulo EDF. Ahora ella ubica otro punto llamado G sobre la circunferencia, construyendo también el triángulo DFG. Ana manifiesta que pretende construir dos triángulos isósceles e identificar la condición que deba tener el triángulo que contenga estos dos triángulos isósceles [95]. Juan por su parte ha estado dibujando en una hoja, sin tener en cuenta lo que Ana ha hecho en pantalla, luego le comenta a ella que una posibilidad es que el triángulo sea rectángulo isósceles, aunque no brinda mayores detalles [96]. Ana le muestra en su construcción que el ángulo EDF y FDG podrían ser rectos [Planeación], idea aceptada por Juan. Ana determina las medidas de estos ángulos y arrastra los puntos G y E para lograr que los ángulos EDF y FDG sean rectos [Implementación]. Cuando logra esto, Juan establece que al parecer el triángulo debe ser rectángulo isósceles y que el segmento PC debe ser altura del mismo [100].

102	Juan	Si quieres, construye un triángulo isósceles… [Ana construye una circunferencia con centro H y radio HI] No, pero necesitamos que PC sea congruente a PA y PB.	P	34:58
103	Ana	No, pero ahí ya está, mira [le señala la pantalla con la circunferencia que previamente construyó].	I	35:01
104	Juan	Pero, ¿si sabemos que esos son colineales? como tú estabas moviendo…		
105	Ana	Espera [construye la recta ED y arrastra a G para que coincida con la intersección de esta recta y la circunferencia]		
106	Inv	¿Qué haces Ana?		
107	Ana	Pues como habíamos hecho estos dos ángulos rectos, acá ya sé que estos dos son congruentes [segmentos GD y DF], se supone que estos ángulos deben ser congruentes [los opuestos a los lados congruentes]…		
108	Juan	Necesitamos que el triángulo esté en una circunferencia que AB sea diámetro de la circunferencia…		
109	Inv	¿De dónde salió eso?		
110	Juan	Es que, lo que pasa es que para que se dé ese caso, los triángulos APC y CPB tienen que ser isósceles rectos, entonces, como PA, PB y PC son iguales, entonces están en una circunferencia de radio 1 en este caso y, además, como están en esta circunferencia, entonces el ángulo ACB va a ser recto, entonces el triángulo ACB es recto y además es isósceles, entonces, para que se dé ese caso, el triángulo ACB es isósceles, recto… solo es esa condición.	A	36:52
111	Ana	Probemos con el de arriba	V	37:53
112	Inv	¿Cuál condición?		
113	Juan	Que sea un triángulo isósceles recto.		
114	Ana	Hagamos con este [arrastran los vértices del triángulo ABC para que se ajuste a las condiciones dadas por Juan].		
115	Juan	Pero, AB es como el lado opuesto al ángulo recto.		
116	Ana	Y esto [señalando al punto P] tiene que ser la…		
117	Juan	El punto medio de AB [Ana arrastra a 		

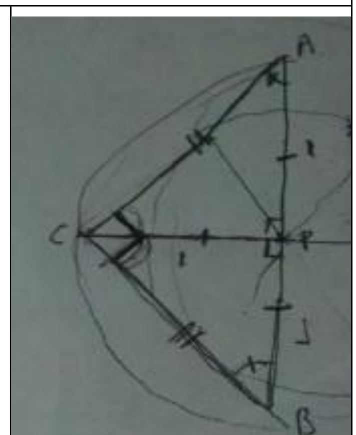
		P para que sea punto medio de AB]. Sí, es aproximado [mira el resultado en pantalla]. Ahí ya sería isósceles, BP sería congruente a PC y PC sería congruente a PA.		S	39:33

Juan propone a Ana que construya un triángulo bajo las condiciones que han reconocido [Planeación]. Ana inicia a construir este triángulo [Implementación] y Juan le solicita que se debe cumplir que PA, PC y PB sean congruentes, a lo que Ana le responde que esta condición se satisface ya en la construcción que realizó previamente [103]. Juan cuestiona la colinealidad de los puntos E, D y G, para lo cual Ana construye la recta ED y arrastra a G hasta que esté sobre esta recta [105]. Esto lleva a Juan a mencionar algunas condiciones del triángulo ABC [108], las cuales justifica con base en las propiedades de los triángulos APC y BPC [110]. Al final, Juan, observando la hoja, establece que la única condición que el triángulo ABC debe cumplir es que sea rectángulo isósceles. Ana propone transformar el triángulo que se construyó al inicio en uno con esas condiciones [Verificación] e inicia a arrastrar los puntos A, B y C para que el triángulo sea rectángulo e isósceles y P sea punto medio del segmento AB, mientras Juan controla las acciones realizadas, para verificar si lo establecido es verdadero. Una vez realizan esto, verifican que lo propuesto permite determinar dos triángulos isósceles.

118	Juan	La conjetura sería, creo que es mejor con la notación ahí sí. Entonces [escribe en la hoja], dado el triángulo ABC, si el triángulo ABC es… Dado triángulo ABC y P pertenece… si el triángulo ABC es rectángulo, ¿sí? e isósceles con segmento AC congruente a segmento CD.	S	
119	Ana	Y [ángulo] C recto.		
120	Juan	Y… sí, el ángulo C recto.		
121	Ana	Yo creo que esto sobra ¿no? [señala la condición de los lados congruentes]		
122	Juan	¿Cómo así?		
123	Ana	Que ya tenemos esto, ya tenemos el triángulo y está diciendo que AC y CB congruentes, ya sabe que es isósceles…		
124	Juan	Sí, tiene razón… puede sobrar, pero cuando se nombra el isósceles, tienen que nombrarse los segmentos congruentes. Pero sí, puede sobrar… Em, el ángulo C recto, entonces…		
125	Ana	¿P es punto medio?		
126	Juan	No, no porque P puede estar en cualquier… [mira la pantalla] Necesitamos que otra condición sea que P sea punto medio, ¿no?		
127	Ana	Ujum.		

128	Juan	P punto medio del segmento AB [lo escribe], entonces…		
129	Ana	Ahí sí los triángulos.		
130	Juan	Entonces, el triángulo PCB y triángulo PCA son isósceles [lo escribe en la hoja]. Entonces, lo que me preocupa es que P, o sea, nos dice es qué condición debe tener el triángulo ABC, no se habla de P. Entonces, no sé si se puede usar como condición, que P sea punto medio del segmento AB.		
131	Ana	Acá te falta nombrar quienes son, ¿no? congruentes [señala los triángulos que se concluye son isósceles].		
132	Juan	¿Qué?		
133	Ana	No, porque si ya demostramos que son isósceles, no es necesario… no se especifica qué lados. Acá [triángulo ABC y sus lados congruentes] sí es importante para que funcione la conjetura ¿no?		
134	Ana	Ujum.		
135	Juan	Sí, sería la conjetura.		

Juan procede a formular una conjetura que recoja el trabajo realizado [Síntesis], él inicia reportando que el triángulo ABC es rectángulo e isósceles con los segmentos AC y BC congruentes y el ángulo ACB recto [118]. Ana sugiere incluir la condición de que el punto P sea punto medio del segmento AB, pero Juan duda en incluirla, accediendo al final a ello [126]. Juan concluye que bajo estas condiciones los triángulos APC y PCB son isósceles. Sin embargo, Juan cuestiona esta conjetura en cuanto el problema solicita establecer condiciones para el triángulo ABC y en su propuesta se está involucrando una condición para el punto P también. Al final no dan mayor desarrollo a esta inquietud y dejan su propuesta como conjetura del trabajo realizado.

136	Inv	¿Qué piensa Ana?		
137	Ana	Cómo demostrarla.	A	44:14
138	Inv	¿Juan?		
139	Juan	Es la condición de que P sea punto medio de AB, porque solo nos dice qué propiedades debe tener el triángulo ABC. No sé, creo que también es necesario que P, sea una condición con P porque P puede moverse en cualquier… punto del segmento AB, entonces, sí [miran la pantalla]. Bueno, entonces ¿cómo lo demostramos? Em, solo tenemos que el triángulo ABC es isósceles [miran la hoja y una representación hecha allí] Ah y que P es punto medio, entonces tenemos que los segmentos AP y PB son congruentes por… porque P es punto medio [marca estos segmentos como congruentes]. También sabemos que los ángulos. 		

140	Ana	Sí, son congruentes [Juan marca los ángulos CBA y CAB].		
141	Juan	El ángulo A y el ángulo B son congruentes. Entonces tenemos congruencia de triángulos [CAP y CPB], por lado-ángulo-lado ¿sí?		
142	Ana	Ujum.		
143	Juan	Tenemos otra condición ¿no? [Marca el ángulo BCA como recto] que…		
144	Ana	Sí, es que estaba pensando cómo usar eso.		

Ana se concentra ahora en cómo demostrar la conjetura [Análisis], pero Juan sigue dudando de la pertinencia de la condición para el punto P, aunque reconoce que debe decirse algo sobre este punto, ya que este es libre de estar en cualquier posición del segmento AB, motivo por el cual deja en su conjetura la condición del punto P [139]. Juan, mirando la representación hecha en la hoja de papel, señala que solamente cuentan con el hecho de que el triángulo ABC es isósceles y que P es punto medio del segmento AB. Concluye que entonces los segmentos BP y PA son congruentes. Ana y Juan también establecen que los ángulos CBA y CAB son congruentes (presumiblemente por que el triángulo ABC es isósceles), lo que en conjunto con lo ya establecido les permite afirmar que los triángulos CPA y CPB son congruentes. Juan al final señala que se cuenta con el hecho de que el ángulo ACB es recto, asunto que Ana resalta dado que no sabía cómo involucrar dicha condición.

145	Juan	Es que incluso puede haber muchas otras condiciones aparte que P sea punto medio, porque puede ser bisectriz ¿cierto? que el rayo CP sea bisectriz y también podría tenerse el caso que CP sea la altura del triángulo. Entonces yo creo que podríamos usar alguna de esas tres que sea más conveniente y cambiarla por la de punto medio [miran la hoja]. Si sabemos que es punto medio, pues tenemos congruencia de triángulos, tendríamos que el segmento CP es congruente a sí mismo y el ángulo ACP sería congruente al ángulo PCB ¿cierto? entonces y como es recto, entonces ahí ya se tendría que CP es bisectriz, eh, pero… Listo, y como, por la… este ángulo mide 45 [BCP], entonces, como por, el hecho geométrico de los ángulos de un triángulo, tienen que sumar 180, el ángulo C mide 90, entonces el ángulo A y como es isósceles, entonces como el ángulo A y B son congruentes, entonces cada uno tiene que medir 45. Como ya sabemos que este ángulo, PCB, mide 45, entonces es congruente al ángulo PBC. Entonces el segmento PC y PB serían congruentes por el hecho geométrico del triángulo isósceles, por lo tanto, y por transitividad, entonces se tendría que PB congruente a PC y así mismo PC congruente a PA. Entonces los triángulos PAC es isósceles y PBC es isósceles. Y ahí se tendría la justificación, con P punto medio.	A	
146	Ana	Bisectriz… [Refiriéndose a la condición del punto P] porque usamos esto [señala la congruencia de loa ángulos BCP y ACP].	V	49:19
	Juan	No, con P punto medio también sacamos la bisectriz, por congruencia de triángulos. ¿Sí? lado - ángulo - lado. Listo.		49:39

En este punto Juan contempla que P puede cumplir otras condiciones distintas a la de ser punto medio, menciona entre esas que el rayo CP sea bisectriz del ángulo ACB o que CP sea altura relativa a C en el triángulo ACB [145]. Esta consideración lo lleva a evaluar la posibilidad de utilizar alguna de esas condiciones y no la propuesta en la conjetura, donde P es punto medio del segmento AB. Sin darle mayor trascendencia a ello, Juan retoma la condición de que P sea punto medio del segmento AB, y menciona que con ello se puede establecer congruencia de triángulos, con lo cual los ángulos ACP y BCP serían congruentes. Por otro lado, asegura Juan, como el rayo CP es bisectriz del ángulo ACP, entonces el ángulo BCP mide 45. Juan luego señala que el ángulo ACB es recto y apoyándose en el hecho geométrico que establece que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo da 180 y en que el triángulo ABC es isósceles con el ángulo CAB congruente al ángulo CBA, entonces cada uno de estos ángulos debe medir 45. Por último, como los ángulos BCP y PCB son congruentes, los segmentos PC y PB son congruentes, luego PC es congruente a PC y a PA y, en consecuencia, los triángulos APC y PCB son isósceles [145]. Al final Ana cuestiona uno de los pasos realizados por Juan [Verificación], pero él le explica un fragmento de su justificación para dar claridad al mismo. Con esto termina el trabajo realizado por este grupo.

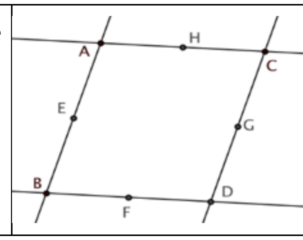
LOS PUNTOS MEDIOS DEL CUADRILÁTERO

El tercer problema abordado por los grupos solicitaba que se determinaran las condiciones necesarias de un cuadrilátero para que los puntos medios de sus lados determinaran un rectángulo. Ambos grupos resolvieron el problema, requiriendo 22 minutos en el caso de Caro y Paul y XX minutos en el caso de Ana y Juan.

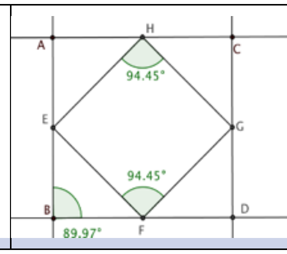
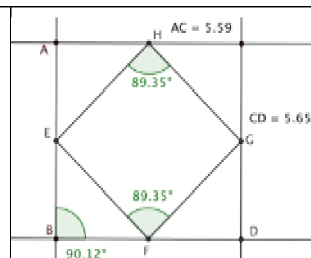
El trabajo de Caro y Paul

Paul inicia a leer el enunciado del problema [Lectura] y cuando termina abre Geogebra [1]. De inmediato propone [Planeación] a Caro iniciar el trabajo involucrando el paralelogramo [2], idea aceptada por ella, con lo que Paul inicia a construir un paralelogramo [Implementación] apoyado en rectas paralelas [6].

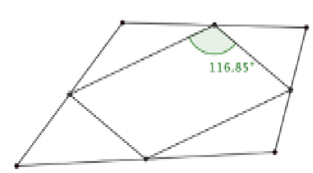
<table>
<tr><td>1</td><td>Paul</td><td>[Lee el enunciado del problema. Abre Geogebra] ¿Entonces, probamos con paralelogramo?</td><td>L</td><td>00:00</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Caro</td><td>Ujum. Hagámoslo con paralelogramo.</td><td>P</td><td>00:26</td></tr>
<tr><td colspan="3">[Construye una recta por dos puntos]</td><td rowspan="2">I</td><td rowspan="2">00:36</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Inv</td><td>¿Por qué con paralelogramo?</td></tr>
</table>

4	Paul	Eh, para empezar a ver… es que en el paralelogramo…		
5	Caro	Es como, es uno de los cuadriláteros más generales.		
6	Paul	Sí, entonces vamos a empezar por este [construye una recta paralela a la recta ya trazada. Luego construye la recta determinada por dos puntos, uno en cada recta. Traza la paralela a esta nueva recta por el segundo punto de la recta inicial y la intersección entre las dos paralelas]. Listo.		
7	Caro	Ahora…		
8	Paul	Los puntos medios.		
9	Caro	Los puntos medios [Paul determina los puntos medios de los lados del paralelogramo]. Ahora construye…		
10	Paul	Espera le damos la vista para que aparezca… las etiquetas [hace visibles los nombres de los puntos construidos]. 		
11	Caro	Ahora construye el cuadrilátero [determinado por los puntos medios. Con la herramienta segmento, Paul construye los segmentos respectivos]. Ahora toma los ángulos [Paul determina las medidas de dos ángulos opuestos del nuevo cuadrilátero]. Ve moviéndolo, o sea, ahora convierte el paralelogramo en ¿qué?, en un cuadrado [Paul arrastra el punto C hasta que el paralelogramo adopta la forma de un cuadrado]. O sea, tómale, tómale…	P I	02:31 02:35
12	Paul	¿Las distancias?, o sea, ahí ya…		
13	Caro	Bueno, conviértelo primero en un rectángulo, o sea, al paralelogramo.	P	02:43
14	Paul	[Manipula el cuadrilátero ABDC con el fin de convertirlo en rectángulo] No [no logra convertirlo en rectángulo].	I	02:46
15	Caro	¿Cómo sabes que es un rectángulo?		
16	Paul	Ay, ya…		
17	Caro	Tómale las [Paul arrastra el punto B y logra que el cuadrilátero ABDC se vea como un rectángulo] Tómale los ángulos [Paul determina la medida del ángulo ABD, esta es de 89.9].		
18	Paul	Es casi un paralelo… un rectángulo y no, no se cumple.		

Posteriormente construye los puntos medios de los lados y el cuadrilátero determinado por estos [8 – 11]. En este punto Caro sugiere que se determinen las medidas de los ángulos del nuevo cuadrilátero, acción realizada por Paul sobre dos ángulos opuestos nada más y que arrojó como resultado un valor distinto a 90. Ante tal resultado, Caro propone [Planeación] que se manipule el paralelogramo para que se convierta en un cuadrado [11]. Paul realiza esto [Implementación] a través del arrastre de los puntos A, B C y D y cuando el paralelogramo luce como un cuadrado, el cuadrilátero determinado por los puntos medios parece ser un cuadrado también. Paul contempla la posibilidad de tomar las medidas de los lados del cuadrilátero, pero Caro lo interrumpe [13] y le pide ahora que convierta el paralelogramo ACDB en un rectángulo [Planeación]. Paul realiza esto [Implementación] mientras Caro le solicita que determine las medidas de los ángulos del cuadrilátero ACDB como soporte de que el cuadrilátero es un rectángulo [17]. Cuando Paul realiza esto el valor de una de las medidas de los ángulos de este cuadrilátero es muy cercano a 90, lo cual lleva a Paul a señalar que, en el caso del rectángulo, esta propiedad no se cumple [18].

19	Caro	Entonces, ahora vuélvelo un… un cuadrado, ¿de pronto? [Paul arrastra el punto C tratando de que el cuadrilátero se convierta visualmente en cuadrado] 	P	03:13
20	Paul	Es que creo que en el cuadrado sí funciona porque como las diagonales son, eh… congruentes y se bisecan… entonces…	I	03:16
21	Caro	No, en el rectángulo es que son congruentes y se bisecan.		
22	Paul	En el cuadrado también.		
23	Caro	Pues sí, porque, el cuadrado es un rectángulo.		
24	Paul	Distancia… [selecciona la herramienta Distancia o Longitud y determina las distancias AC y CD]		
25	Inv	¿Qué van a hacer ahí?		
26	Paul	Volverlo cuadrado. Entonces tomamos las distancias para que coincidan los lados [las distancias AC y CD son respectivamente 5.84 y 5.32].		
27	Caro	5.32 [Paul arrastra el punto C y el punto B para que los segmentos AC y CD sean congruentes].		
28	Paul	Casi, yo creo que sí. Ven lo construimos. 		

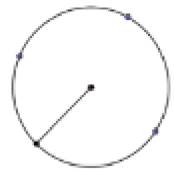
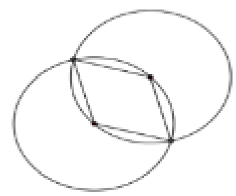
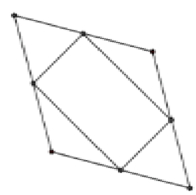
Caro propone nuevamente [Planeación] convertir el paralelogramo en un cuadrado [19] y Paul procede en correspondencia a esta idea [Implementación] a la vez que considera que en este cuadrilátero se debe cumplir la propiedad solicitada, en cuanto en el cuadrado, según Paul, las diagonales son congruentes y se bisecan. Este argumento es refutado por Caro, quien asegura que esta propiedad es verdadera en los rectángulos, ante lo que Paul le discute en cuanto esto también es verdadero en el cuadrado. Al final Caro acepta esta idea en cuanto, para ella, el cuadrado es al mismo tiempo un rectángulo [23]. Paul determina las longitudes de los segmentos AC y CD y arrastra los puntos A, B, C y D hasta que el cuadrilátero se asemeja a un cuadrado, en ese punto observa que el cuadrilátero determinado por los puntos medios parece ser un rectángulo, lo que lleva a Paul a proponer que se construya un cuadrado y con ello verificar si se cumple o no la propiedad [Verificación].

29	Caro	Construyamos un… [Paul selecciona la herramienta Polígono regular y construye un cuadrado]		
30	Inv	Y, ¿ahí?		
31	Paul	Ahí vamos a hacer un cuadrado para ver si se cumple. Entonces, puntos medios… [construye los puntos medios de los lados del cuadrado] Ah, pues tomemos los ángulos de una vez [determina la medida de uno de los ángulos del cuadrilátero determinado por los puntos medios y esta da 90]. Sí.	V	04:11
32	Caro	Sí.		
33	Paul	Se cumple en un cuadrado.		
34	Caro	Entonces, en el único paralelogramo que se cumple es un cuadrado, ¿sí?		
35	Paul	Sí, porque en los trapezoides se forma es… en un cuadrilátero cualquiera se forma es un paralelogramo, por un teorema [construye el cuadrilátero determinado por los puntos medios de los lados del cuadrado].	S	04:53
36	Caro	Pues mira a ver si… construye un trapezoide cualquiera [Paul construye un cuadrilátero sin propiedad alguna y los puntos medios de sus lados].		
37	Inv	¿Qué es un trapezoide?		
38	Paul	Em, un cuadrilátero que no tiene como tal una propiedad…		
39	Caro	Que todos los lados y todos los ángulos son desiguales, o sea… no tiene nada regular [Paul determina la medida de uno de los ángulos del cuadrilátero determinado por los puntos medios del nuevo cuadrilátero]. No, no se cumple [arrastra uno de los vértices]. 	V	05:07
40	Paul	Será que en un rombo… ah no porque… ¿será que sí?		
41	Caro	Todo cuadrado es un rombo… Tocaría mirar si en el rombo de pronto se cumple esa propiedad.	P	06:01
42	Paul	[Arrastra los vértices del trapezoide por algún momento] No, este no se cumple. Entonces un rombo [construye un segmento, una circunferencia para la cual este segmento es radio, un punto en la circunferencia, el segmento determinado por ese punto y el centro de la circunferencia].	I	06:11

Paul construye el cuadrado con ayuda de la herramienta polígono regular [29] y construye luego los puntos medios de sus lados [31]. Paul no determina el cuadrilátero que los puntos medios conformarían, solamente determina la medida de uno de sus ángulos y esta da exactamente 90, lo que los lleva a concluir que en el cuadrado se cumple la propiedad solicitada en el problema [33]. Caro recoge las experiencias que han tenido [Síntesis] y asegura que en el único paralelogramo que esta propiedad se cumple es el cuadrado [34]. Como complemento a esta afirmación, Paul asegura que esto es verdad y que, en los cuadriláteros, en general, el cuadrilátero que determinan los puntos medios de sus lados es apenas un paralelogramo [35], lo cual, en palabras de Paul, se sustenta en un hecho geométrico conocido.

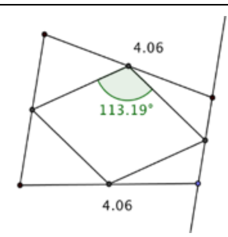
Finalmente, Caro propone que se construya un trapezoide [36] con el fin de corroborar si lo dicho por Paul es verdadero [Verificación]. Paul realiza esto y construye el cuadrilátero determinado por los puntos medios de los lados del cuadrilátero y toma la medida de uno de los ángulos, la cual es distinta a 90. Al arrastrar los vértices del trapezoide, ven que la medida de este ángulo no corresponde a 90, esto las lleva a descartar este tipo de cuadrilátero como uno de aquellos donde la propiedad se cumple [39]. Paul considera ahora la posibilidad de que en un rombo la propiedad estudiada se satisfaga [Planeación], idea compartida por Caro [41], por lo cual ahora proceden a construir este cuadrilátero [Implementación].

43	Caro	¿Cuál es la definición de rombo?		
44	Paul	Todos los lados congruentes.		
45	Caro	Nada de los ángulos…		
46	Paul	No [oculta la circunferencia].		
[No es afortunada la forma de construir el rombo. No tienen claridad de cómo hacerlo]				
47	Caro	Traza el segmento y lo hacemos, hasta que coincidan las distancias [lograr que los cuatro segmentos sean congruentes].		
48	Paul	Y si hacemos dos estas que se bisequen, dos circunferencias con el mismo… ah no. No sé. ¿Entonces hago otro segmento?	I	
49	Caro	No, sí. Haz las dos circunferencias, de ahí salen… ¿un qué?, un rombo [Paul construye una circunferencia y explora dentro de las herramientas de Geogebra]. No, o sea, ¿recuerdas cómo la vez pasada construimos el triángulo equilátero?		
50	Paul	Sí.		
51	Caro	Así construyamos el… ¿sí?		
52	Paul	Mmm, no [no comprende el mecanismo propuesto por Caro]. No pues ya, ¿y si creamos la circunferencia y ponemos cuatro puntos en ella?		
53	Caro	Por eso…		

54	Paul	Am [la construcción que realizaban se borra, dejando solo un segmento. Construye una circunferencia para el cual ese segmento es radio]. … cuatro puntos diferentes [ubica tres puntos en la circunferencia].			
55	Caro	No…			
56	Paul	Sí, porque todos los radios son iguales, ¿no? Y luego haríamos…			
57	Caro	No, porque tú vas a trazar cuatro segmentos.			
58	Paul	Por eso, pero eliminamos este [el radio]…			
59	Caro	No, no, así no sale… porque tuvo que vas a hacer es… y esos no son radios.			
60	Paul	Ah, sí, sí, ya entendí el punto [ahora Caro realiza la siguiente construcción]. Ah sí, ya sale ahí… [Caro oculta las circunferencias] Hagamos los puntos medios…			
61	Caro	Ajá… [Paul determina los puntos medios de los lados del rombo] Y ahora traza… [Paul construye el cuadrilátero determinado por los puntos medios]			
62	Paul	También se cumple… [mientras traza los segmentos]			
63	Caro	[Paul arrastra algunos vértices del rombo] Toma los ángulos.			
64	Paul	[Paul mide uno de los ángulos del cuadrilátero determinado por los puntos medios y este da 90] Sí, también…			

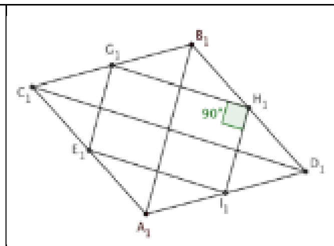
Para iniciar la construcción del cuadrilátero, Caro indaga por la definición de este tipo de cuadrilátero, a lo que Paul le responde que la condición que se debe cumplir es que sus lados sean congruentes [44]. Algunos intentos para construir este cuadrilátero son propuestos, sin éxito alguno [46 – 50]. Al parecer no se tiene claridad sobre cómo obtener este cuadrilátero. Al final, tras descartar las construcciones propuestas por su insuficiencia, Caro realiza una construcción robusta del rombo [60], traza sus puntos medios y el cuadrilátero determinado por estos. Paul anticipa el cumplimiento de la propiedad en el rombo [62] y Caro le pide que determine las medidas de sus ángulos [63], obteniendo que efectivamente uno de estos ángulos es recto, asunto que lleva a Paul a asegurar el cumplimiento de la propiedad en el rombo.

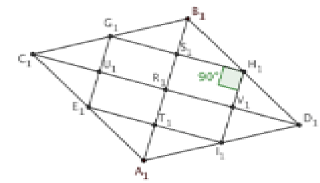
65	Caro	En el rombo se cumple. Em, nos falta el trapecio isósceles [Paul desplaza la	P	11:17

		pantalla y construye un segmento, una recta paralela a este, dos puntos en la recta paralela y los segmentos determinados por estos y los extremos del primer segmento, conformando así el cuadrilátero]. Toma las distancias [de los lados no paralelos del trapecio. Estas dan 3.84 y 3.83 pero el trapecio no es realmente isósceles].		
66	Gru	Ahora los puntos medios [construye los puntos medios de los lados del trapecio, el cuadrilátero determinado por estos y la medida de un ángulo de este cuadrilátero].		
67	Caro	No.		
68	Paul	No [arrastra uno de los vértices del trapecio y la medida del ángulo del segundo cuadrilátero varía]…	I	11:25
69	Caro	3.81 [medida de uno de los lados no paralelos]. No, eso es un trapezoide… un trapecio normal. Es en un… trapecio isósceles…		
70	Paul	Sí [arrastra un vértice del trapecio intentando que este se vea como isósceles hasta que lo logra]… cuatro [medida de un lado no paralelo]… ahí está [los dos lados no paralelos son congruentes]. 		
71	Caro	No, no se cumple.		
72	Paul	Se cumple entonces en los…	S	13:48
73	Caro	En los rombos… porque el cuadrado es un rombo.		

Al verificar que en el rombo la propiedad se satisface, proceden a analizar el comportamiento en el trapecio isósceles [Planeación], para ello construyen [Implementación] uno apoyados en dos rectas paralelas, aunque este cuadrilátero no es precisamente isósceles [65]. Posterior a esto, determinan los puntos medios de los lados del trapecio y el cuadrilátero determinado por estos y la medida de uno de sus ángulos [66]. Sin embargo, la medida, distinta a 90, las lleva a descartar en un primer momento que en este cuadrilátero se satisfaga la propiedad. Paul arrastra uno de los vértices del cuadrilátero con la intención de que este sea un trapecio isósceles y cuando lo logra, se dan cuenta que la medida del ángulo que habían determinado no es igual a 90 [71]. Al final, como fruto de la exploración realizada, los estudiantes concluyen [72, 73] que la propiedad declarada en el enunciado del problema se cumple en los rombos [Síntesis].

74	Paul	Y ahora sí, ¿por qué pasa?… las diagonales del rombo se bisecan	A	13:55

75	Caro	Bueno, pues, eh, por definición, [Paul construye las diagonales del rombo] en todos los cuadriláteros, o sea, los puntos medios de los segmentos que determinan el cuadrilátero forman un paralelogramo. Entonces, en el rombo… el rombo como es un paralelogramo, entonces pues los puntos medios de sus segmentos forman un paralelogramo. Pues ya tenemos que este cuadrilátero se forma con los puntos medios aquí en el rombo…  En el cuadrilátero B1D1A1C1, pues es un rombo. Entonces, y pues por la propiedad… y pues el rombo es un paralelogramo, y por la propiedad que mencionaba anteriormente, que los puntos medios de los segmentos de cualquier paralelogramo forman un…, de cualquier cuadrilátero, perdón, forman un paralelogramo, pues el rombo es un cuadrilátero. Entonces pues ya tenemos que G1H1I1E1 es un paralelogramo, listo, por ese lado ya tenemos… pues ya sería paralelogramo… ahora, ¿por qué es un rectángulo? um… bueno, en el rombo también hay una propiedad de que los ángulos opuestos…		
76	Gru	Son congruentes…		
77	Caro	Entonces, son congruentes… entonces, pues aquí tendríamos dos triángulos congruentes, sería C1G1E1 congruente con D1H1L1, por lado-ángulo-lado. Pues por lo que, como los lados [del rombo] son congruentes, pues el punto medio también determinaría dos segmentos congruentes en cada uno de los lados, entonces pues por ende estos dos em, estos dos triángulos serían congruentes, ¿cierto?		
78	Paul	Sí.		
79	Caro	Listo, igual estos dos, B1G1H1 y A1I1E1.		
80	Paul	Pero para llegar a perpendicular toca llegar a los 90 grados, ¿cierto?		
81	Caro	Ujum, bueno entonces tendríamos que G1H1 y E1I1 son congruentes y G1E1 y H1I1 son congruentes, pues eso ya lo tendríamos, ya lo habíamos tenido antes por lo que esto [cuadrilátero G1H1I1E1] es un paralelogramo, ¿cierto?		
82	Paul	Ah y también tenemos que G1H1I1E1 por ser un paralelogramo, las diagonales son congruentes, o sea, la diagonal…		
83	Caro	No, se bisecan.		
84	Paul	Ah no, sí… se bisecan.		
85	Caro	Y también tenemos una propiedad que dice que, en todo rombo, eh, las diagonales son perpendiculares.		
86	Paul	Sí…		
87	Caro	Entonces pues… espera llamo el punto de intersección acá… [Llama R1 a la intersección de las diagonales] listo. Entonces, pues bueno, las diagonales en un rombo son perpendiculares… ¿cierto?		
88	Paul	Ujum…		

89	Caro	Entonces acá se formaría un cuadrilátero pequeñito… se formarían cuatro cuadriláteros pequeños [refiriéndose a los determinados por las intersecciones las diagonales del rombo y los lados del cuadrilátero]. Listo, como las diagonales son perpendiculares, entonces se forma el cuadrilátero S1R1V1H1, ¿sí?, entonces significa que el ángulo S1R1V1 es…			
90	Paul	Recto			

El trabajo realizado para descubrir las propiedades del cuadrilátero en el que los puntos medios de sus lados determinan un rectángulo parece que ha culminado y ha dejado como resultado que en el rombo esto se satisface. Paul inicia el proceso de justificación al cuestionar [74] el motivo por el cual la propiedad se satisface en el rombo [Análisis] y proveer una propiedad conocida por él en este cuadrilátero. De inmediato Caro, apoyándose en la construcción realizada de un rombo, establece que el cuadrilátero que se determina a partir de los puntos medios de los lados del rombo es un paralelogramo, también establece que el rombo es un paralelogramo, sin embargo, no desarrolla estas ideas y pausa su intervención. Paul la ayuda enunciando algunos hechos geométricos conocidos que podrían ser involucrados en el caso estudiado y en algunas oportunidades se corrigen entre ellos cuando la forma de declarar estas propiedades no es adecuada. Una de las propiedades mencionadas por Caro, que hace referencia a la perpendicularidad de las diagonales en el rombo [85], les permitió trazar una ruta para la justificación parcial de la propiedad en el rombo.

91	Caro	Es recto. Y nosotros tenemos una propiedad, como un teorema, sí, es un teorema, que dice que un cuadrilátero con un ángulo recto es un rectángulo. Entonces se formaría ese, ¿ese qué?, ese rectángulo.	A	
92	Paul	Pero no es cualquier cuadrilátero, es si es un paralelogramo…		
93	Caro	Sí, sí. No, de todas maneras, igual.		
94	Paul	No…		
95	Caro	Ah, no, no, mentiras. Entonces, eh, pues bueno, se forma este, este paralelogramo con el ángulo recto.		
96	Paul	¡Ah! y esto se puede justificar de que se forma el paralelogramo porque esta, como este [S1] es punto medio a la vez de este segmento, de B1R1 y H1 es el punto medio del segmento B1D1, entonces por el teorema que, si son, pues, los puntos medios entonces esta línea [segmento S1H1] es paralela [a R1D1].		
97	Caro	Ah, porque acá se forma un triángulo pequeño [B1R1D1], entonces dice que el segmento que…, se forma el triángulo C1B1A1, entonces dice que los puntos medios de dos lados del triángulo, eh, el segmento que une esos puntos medios es paralelo al tercer lado. Entonces pues esos dos segmentos [G1E1 y B1A1] serian	V	19:35

		paralelos, igual con el otro triángulo, con B1D1A1. Bueno, entonces volviendo con este cuadrilátero pequeño, este cuadrilátero pequeño sería un paralelogramo, entonces, y tiene un ángulo recto.		
98	Inv	¿Por qué es un paralelogramo ese cuadrilátero pequeño?		
99	Paul	Porque si vemos el triángulo chiquito, o sea, B1R1D1, eh, mirando ese triángulo, S1 es el punto medio del segmento B1R1… sí este, S1 es punto medio de este segmento pequeñito [B1R1], y H1 es punto medio de B1 y D1. Entonces, como ahí tenemos ese triángulo y como son dos puntos medios, por ese teorema, ese lado, S1H1, es paralelo al lado…		
100	Caro	R1D1. Entonces pues este pequeño sería un paralelogramo, y pues como ya sabemos que estas dos son diagonales [del rombo] y son perpendiculares, entonces sería un paralelogramo [S1H1V1R1] con un ángulo recto [S1R1V1]. Por ende, entonces, pues un paralelogramo con un ángulo recto sería un rectángulo, igual funciona para los otros cuatro [cuadriláteros al interior del rombo]. Entonces, como son rectángulos, ya tendríamos que, bueno, S1G1U1 sería recto, que U1E1T1 sería recto, que T1I1V1 sería recto, entonces, por ende, el cuadrilátero G1H1I1E1 sería un rectángulo.	A	20:44
101	Paul	Rectángulo. Listo.		21:36

El desarrollo de la idea de Caro cuenta con correcciones realizadas por Paul cuando alguna declaración realizada no es totalmente correcta [92, 94] y en algunos momentos esta es complementada por ella [96]. Caro retoma [Verificación] los argumentos elaborados por Paul para conectarlos al desarrollo que ella venía realizando [97] y con ello logra construir la parte final de la justificación.

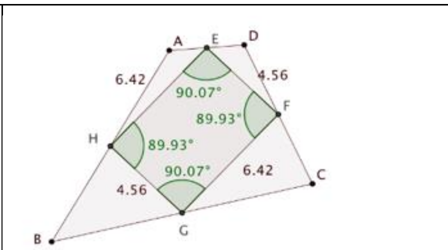
EL trabajo de Juan y Ana

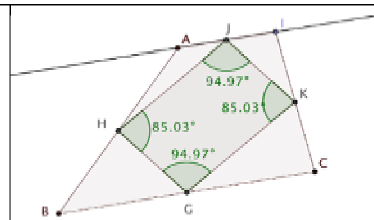
Juan inicia leyendo [Lectura] el enunciado del problema en su totalidad y cuando finaliza Ana realiza la representación de un cuadrilátero en Geogebra. Por su parte, Juan representa en una hoja un cuadrilátero sin indicar el motivo de ello.

1	Juan	[Lee el enunciado del problema]	L	00:15
2	Ana	[Juan dibuja en una hoja el cuadrilátero] Si quieres lo hago acá.	C	00:43
3	Juan	Sí, ve haciendo en Geogebra [Ana construye un cuadrilátero]. Los puntos medios…	P	00:46
4	Ana	¿El de punto medio es este? [pregunta por la herramienta indicada]	I	00:50
5	Juan	[Ana va a renombrar los puntos] Ahorita los… Entonces construimos un cuadrilátero cualquiera y hallamos los puntos medios de los segmentos [Ana termina de construir los puntos medios], de cada lado.		
6	Ana	Tracemos de una vez el… [construye el cuadrilátero determinado por los puntos medios]		
7	Juan	Trazamos el polígono… el cuadrilátero determinado por los puntos medios. Entonces yo creo que sería bueno, entonces, los ángulos y…		

8	Ana	Y los lados.		
9	Juan	Los lados y las medidas de los…		
10	Inv	¿Qué ángulos y qué lados?		
11	Juan	Los ángulos del cuadrilátero determinado por los puntos medios [Ana determina las medidas de los ángulos de dicho cuadrilátero, pero se muestran las medidas de los ángulos que son mayores a 180].		
12	Ana	Acá hay una opción, ¿cierto? [para que muestre las medidas menores a 180]		
13	Juan	Sí [en las herramientas disponibles corrige las medidas de los ángulos del segundo cuadrilátero construido].		
14	Ana	Listo.		
15	Juan	Y ahora las longitudes… [Ana determina las longitudes de los lados del segundo cuadrilátero] Bueno, empecemos a modificar el cuadrilátero ABCD…		

Ana construye el cuadrilátero y los puntos medios de sus lados [3], luego construye el cuadrilátero que estos puntos medios determinan [7]. Posteriormente, Juan y Ana toman la decisión de determinar las longitudes de los lados y medidas de los ángulos del nuevo cuadrilátero. Al final consideran que iniciarán a afrontar el problema a través de la modificación del cuadrilátero ABCD.

16	Ana	Y que todos sean ángulos rectos [arrastra el punto A hasta que los ángulos del segundo cuadrilátero se aproximan a 90].		E	04:46
17	Juan	Por ahí [aproxima aún más las medidas]. O marquemos de una vez todos los ángulos… rectos [Ana sigue aproximando las medidas]. Pareciera que tuviera solo un par de lados paralelos también… [cuadrilátero ABCD]			
18	Ana	Sí.			
19	Inv	¿Cómo?			
20	Juan	Pareciera que se cumple que para que el cuadrilátero determinado por los puntos medios sea rectángulo, es necesario que el cuadrilátero ABCD sea trapecio [Ana aproxima las medidas]. Entonces, ahora…			
21	Ana	Espérate… [aproxima las medidas]			
22	Juan	Haz que este segmento [AD] sea paralelo a este [CB]. Segmento AD…			
23	Ana	Si trazamos una paralela y luego lo corremos. Trazar una paralela a este segmento [señala el segmento BC] por el punto A y el punto D que… [Traza la paralela a BC y vincula a D a esta recta] creo que ya, no sé.		P I	06:23 06:28
24	Juan	Listo, ahora miremos si los lados son congruentes.		P	06:58
25	Ana	Congruentes, sí.			

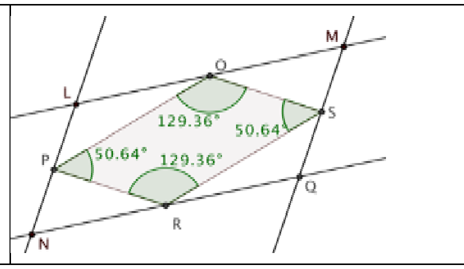
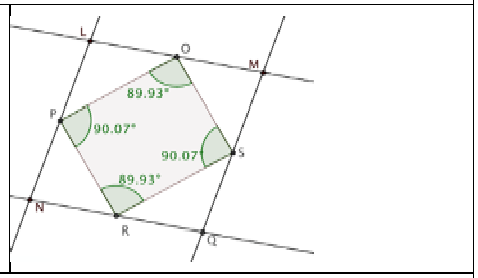
26	Juan	Ah sí, ahí ya están marcados [lados del segundo cuadrilátero], ya, son congruentes.		
27	Ana	Pero los ángulos, mira [señala los ángulos del segundo cuadrilátero].		
28	Juan	Ahí ya son paralelas ¿cierto?	V	07:08
29	Ana	Se supone [al arrastrar al punto D se da cuenta que no ha sido vinculado a la recta paralela]. No, espera [intenta nuevamente vincular el punto D a la recta]. No. Entonces ¿cómo hacemos?		
30	Juan	Entonces, eh, ubica un punto en la paralela [Ana dibuja un punto en la recta paralela, llamado I]. Ya, ahora traza el nuevo cuadrilátero ABCI… [Ana traza este cuadrilátero ocultando el cuadrilátero ABDC] Sí y ahora quita ese cuadrilátero [determinado por los puntos medios de los lados del primer cuadrilátero], así como hiciste. Halla el punto medio del segmento AI [Ana dibuja el punto medio del segmento AI]. Ya, ahora traza el nuevo cuadrilátero. El cuadrilátero…	P	07:31
31	Ana	Espera, voy a quitar esos ángulos [oculta uno de los determinados en cuadrilátero de los puntos medios]. Este no más.	I	07:35
32	Juan	Espera, ese también era necesario [sugiere eliminar otro ángulo]		
33	Ana	Ah, este.		
34	Juan	Todos, mejor dicho. Listo [oculta todos los ángulos]. Entonces hacer el cuadrilátero [construye los puntos medios de los lados del cuadrilátero ABCI y el cuadrilátero determinado por estos]. Listo, entonces ahora sí hallamos los ángulos [del nuevo cuadrilátero]. Uy… [mirando las medidas de los ángulos] 		
35	Inv	¿Qué pasa?		
36	Juan	Que no se cumple. No se cumple.		
37	Ana	No.		

Para Ana es claro que la modificación del cuadrilátero ABCD debe permitir que el cuadrilátero determinado por los puntos medios se convierta en rectángulo [16] y en consecuencia arrastra los vértices del primer cuadrilátero [Exploración] hasta obtener medidas de los ángulos muy cercanas a 90 [17]. Con base en la representación en pantalla, Juan anticipa que al parecer el cuadrilátero ABCD deba ser un trapecio [20] y le solicita [Planeación] a Ana que manipule el cuadrilátero de tal forma que los segmentos AD y BC sean paralelos [22]. Para lograr esto [Implementación], Ana traza una recta paralela al segmento BC por el punto A y vincula al punto D a esta [23]. Cuando van a mirar el segundo cuadrilátero para observar sus propiedades [Planeación], reconocen que en este sus lados opuestos son congruentes pero los ángulos no son rectos [27]. Juan cuestiona si los segmentos AD y BC son paralelos [Verificación] y Ana, al arrastrar al punto D descubre que este no está vinculado a la recta paralela y que no es posible hacer esto. Como respuesta a esta situación, Juan propone [Planeación] ubicar un nuevo punto en la recta paralela que sustituya al punto D para determinar el cuadrilátero ABCD [30]. Ana realiza esto, obteniendo ahora el cuadrilátero ABCI [Implementación] y el cuadrilátero determinado por los puntos medios de sus lados. Al determinar las medidas de los ángulos del cuadrilátero HJKG, determinado por los puntos medios, concluyen que este no es rectángulo en cuanto los valores no son cercanos a 90 [36, 37].

38	Juan	No se cumple [Ana arrastra el punto I hasta que los ángulos del cuadrilátero JKGH miden 90].	E	10:41
39	Ana	Um. Mira [determina las longitudes de los lados del cuadrilátero JKGH y le señala a Juan los lados AB y CI].		
40	Juan	Este segmento a comparación de este…		
41	Ana	Espera.		
42	Juan	¿Qué vas a…?		
43	Ana	Estos lados, al parecen van a ser congruentes [determina las longitudes de los segmentos AB y CI].		
44	Juan	¿Que sea un trapecio isósceles?		
45	Ana	Ujum. Um, no [observan la pantalla, las longitudes de los segmentos AB y CI no son iguales].		

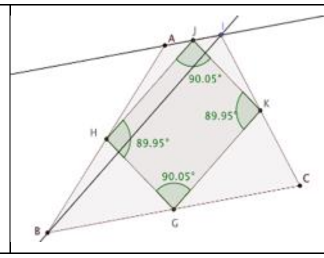
La primera impresión de los estudiantes al ver el resultado en pantalla los llevó a concluir que en el trapecio no se obtenía un rectángulo [38]. Ahora Ana inicia a arrastrar el punto I hasta que logra que el cuadrilátero JKGH sea rectángulo [Exploración] y la configuración en pantalla les sugiere una posible congruencia entre los lados no paralelos del trapecio [43], motivo que lleva a Ana a determinar las longitudes de estos segmentos. Desafortunadamente los resultados en pantalla no permiten concluir que los segmentos sean congruentes, por lo que descartan la posibilidad que el trapecio sea isósceles [45].

46	Juan	Por lo menos, yo quiero descartar la posibilidad del paralelogramo, a ver sí… ubico los puntos medio de ese…	V	12:50
47	Inv	¿Cómo así?		
48	Juan	Hacer un paralelogramo y los puntos medios de los lados de ese paralelogramo determina otro cuadrilátero. Mirar qué pasa con ese cuadrilátero [Ana construye un paralelogramo en otro lugar de la pantalla con la herramienta Rectas paralelas. Luego dibuja los puntos medios de los lados de este cuadrilátero].	P	13:00
			I	13:06

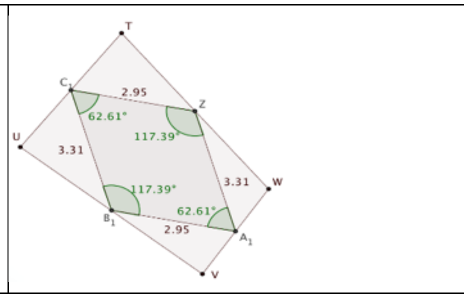
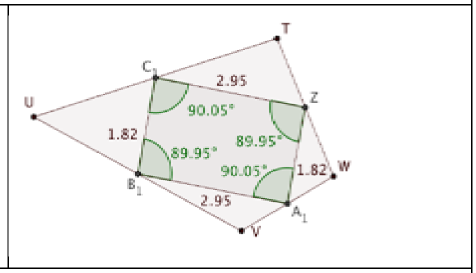
49	Ana	No sé… [determina el cuadrilátero que esos puntos medios configuran y las medidas de sus ángulos] 		
50	Juan	No. Entonces no tiene que ser…		
51	Ana	Espérate a ver… [arrastra el punto M] No [el cuadrilátero OSRP de distorsiona]. [Sigue arrastrando a M hasta que el cuadrilátero LMQN parece ser rombo y el cuadrilátero OSRP parece rectángulo, aproxima las medidas de los ángulos a 90] 		
52	Juan	Que sea un cuadrado.		
53	Ana	No [sigue aproximando las medidas a 90].		
54	Juan	Sí, haz que sea un cuadrado. Es que este caso… no [el del paralelogramo] Vuélvelo a subir por favor [retornar la anterior construcción].	P	14:59
55	Ana	Pero sí que haya dos paralelas [mirando la primera construcción]		
56	Juan	Tengo una sospecha, que un par de lados tiene que ser paralelos, pero tiene que haber otra condición, porque nos dimos cuenta que con el paralelogramo no se tiene que sea un rectángulo, entonces… y ahora no se cumple para cualquier trapecio. Es decir, no se cumple para cualquier, o sea, el trapecio también debe tener otra condición porque a medida que nosotros extendemos un segmento [alarga el segmento AI], ya no se cumple que es un rectángulo [observan la pantalla].	A	15:36

Ahora Juan quiere analizar lo que ocurre en el paralelogramo, con el objetivo de ver [Verificación] si en este cuadrilátero se cumple o no la propiedad estudiada [46]. Él propone construir un paralelogramo, los puntos medios de sus lados y el cuadrilátero que estos puntos determinan [Planeación]. Ana realiza esto [Implementación], pero al determinar las medidas del cuadrilátero determinado por los puntos medios los valores no son iguales ni cercanos a 90, resultado que motiva a Juan a asegurar que el cuadrilátero ABCD no tenía que ser paralelogramo [50]. Ana no descarta aun la posibilidad de que el cuadrilátero que los puntos medios determinan llegue a ser rectángulo y de manera similar a lo realizado con el trapecio, inicia ahora a modificar el paralelogramo hasta un punto en que se obtiene el rectángulo [51].

En ese punto Juan menciona que el cuadrilátero LMQN podría ser un cuadrado [52] y le pide a Ana que lo transforme en esto [Planeación] dado que en el paralelogramo en general no se satisface la propiedad. Ana, observando ambas construcciones, señala que posiblemente una propiedad del cuadrilátero es que tenga un par de lados paralelos, Juan, por su parte, reconoce que adicional a esta propiedad se debe cumplir otra, dadas las experiencias que han tenido con los paralelogramos y los trapecios, donde en algunos casos se cumple la propiedad, pero en otros no.

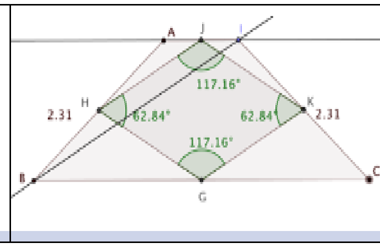
<table>
<tr><td>57</td><td>Inv</td><td colspan="2">¿Qué piensan?</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>58</td><td>Juan</td><td colspan="2">Yo digo que esta diagonal [con el mouse señala la diagonal BI] tiene que ser como paralela. ¿Me ayudas?</td><td rowspan="3">P</td><td rowspan="3">18:06</td></tr>
<tr><td>59</td><td>Ana</td><td colspan="2">¿Esta? [señala los puntos B e I]</td></tr>
<tr><td>60</td><td>Juan</td><td colspan="2">Sí, quiero es como correr otra vez el punto [I].</td></tr>
<tr><td>61</td><td>Ana</td><td colspan="2">¿Para dónde? [corre a I a lo largo de la recta que lo contiene]</td><td rowspan="9">I</td><td rowspan="9">18:26</td></tr>
<tr><td>62</td><td>Juan</td><td colspan="2">Así, por la recta.</td></tr>
<tr><td>63</td><td>Ana</td><td colspan="2">Ah, ¿una paralela a esta [segmento AB] que pase por acá [punto I]?</td></tr>
<tr><td>64</td><td>Juan</td><td colspan="2">Sí, paralela… pero es que.</td></tr>
<tr><td>65</td><td>Ana</td><td colspan="2">Um, bueno [construye la paralela a AB por I].</td></tr>
<tr><td>66</td><td>Juan</td><td colspan="2">No, a este, al segmento HJ.</td></tr>
<tr><td>67</td><td>Ana</td><td>Ah ya [construye la paralela al segmento HJ por I y esta contiene al punto B]. ¿Y ahora si cuadrar? [arrastra el punto I y lo acerca a A, buscando ángulos rectos en el cuadrilátero JKGH] No, pero igual… [las rectas son paralelas en todo momento bajo arrastre]</td><td>
</td></tr>
<tr><td>68</td><td>Juan</td><td colspan="2">¿Sigue siendo paralela? [Ana arrastra lentamente a I]</td></tr>
<tr><td>69</td><td>Inv</td><td colspan="2">¿Cuál era su idea Juan?</td></tr>
<tr><td>70</td><td>Juan</td><td colspan="2">Pensé que de pronto las diagonales de ese trapecio tenían que ser paralelas al segmento determinado por los puntos medios, pero no. No me funciona tampoco y no sé si haya la posibilidad que un cuadrilátero que no sea, no tenga lados paralelos, se pueda construir ese rectángulo.</td><td>P</td><td>19:55</td></tr>
</table>

Retomando la primera construcción realizada, Juan manifiesta que posiblemente una condición del cuadrilátero ABCI para que los puntos medios de sus lados determinen un rectángulo es que una de sus diagonales sea paralela a uno de los lados de este cuadrilátero y por ello pide a Ana que arrastre el punto I sobre la recta que lo contiene [Planeación] de tal forma que pueda corroborar su idea. Ana realiza esto [Implementación] y traza además una recta paralela al segmento HJ por el punto I [67] pero al arrastrar el punto I se percatan que en todo momento el segmento HJ es paralelo a la recta que se construyó por I, y esto no permite identificar alguna propiedad adicional para que se determine un rectángulo. Juan se cuestiona ahora por la posibilidad [Planeación] de encontrar un cuadrilátero donde no se tengan lados paralelos, distinto a los dos casos que se han estudiado hasta ahora, donde los puntos medios de sus lados determinen un rectángulo [70].

71	Ana	Intentemos [corre la pantalla]. Por acá [construye un cuadrilátero, sus puntos medios y el cuadrilátero que estos determinan y las medidas de sus ángulos]. Y los lados [del nuevo cuadrilátero]. 	I	20:09
72	Inv	¿Qué hicieron?		
73	Ana	Construir otro cuadrilátero pero que no haya lados paralelos [arrastra a T hasta obtener una configuración en la cual ZA1B1C1 sea rectángulo]. 		
74	Juan	Por ahí. No parece que fueran paralelas. ¿Qué condición…?		
75	Ana	No, esas no son paralelas.		
76	Juan	No, no tienen que ser paralelas, parece…		
77	Ana	No.		
78	Inv	¿Qué vas a hacer?		
79	Ana	Comprobar si son paralelas [usa la herramienta Relación y esta no arroja segmentos paralelos], pero no. [mira esta construcción y la hecha al inicio] Um, no. Pensé que había un ángulo recto, UTW, pero no. Mirando este caso [primera construcción], no.	V	22:29
80	Juan	Y no hay lados congruentes.		
81	Ana	No [en pantalla coloca la primera y última construcción].		
82	Juan	¿Hay que medir esos lados?		
83	Ana	Dime		
84	Juan	Medir esos lados [del cuadrilátero UTWV].		
85	Ana	¿Estos?		
86	Juan	Para ver si de pronto son congruentes. Es que…		
87	Ana	[Determina las longitudes de los lados del cuadrilátero UTWV] No, pero igual no.		

Bajo la inquietud de Juan, Ana procede a construir un cuadrilátero sin lados paralelos, sus puntos medios y el cuadrilátero determinado por estos [Implementación]. También determina los valores de las longitudes de los lados, así como las medidas de los ángulos de este nuevo cuadrilátero.

Luego de esto, Ana arrastra los vértices del cuadrilátero TWVU hasta que el cuadrilátero ZA1B1C1 es un rectángulo. En ese momento reconocen que el cuadrilátero TWVU no requiere de lados paralelos y Ana procede a verificar esto con ayuda de Geogebra [Verificación], corroborando así que ningún par de lados del cuadrilátero es paralelo [79]. De manera similar identifican que tampoco se cuentan con lados congruentes [86, 87].

88	Juan	Pero son valores muy cercanos, de pronto sí [las longitudes de los lados del cuadrilátero UTWV]. Ayúdame a correr este [punto I]. Que este [segmento IC] sea congruente a este [segmento AB]. [Ana arrastra a C y logra que los segmentos AB y CI sean congruentes] No [el cuadrilátero interno no es rectángulo]. 	P I	24:44 24:51
89	Ana	No, no puede ser.		
90	Juan	Ah, no hemos mirado este [segmento AB] con este [segmento BC], los lados adyacentes [Ana determina la longitud del segmento CB, que es distinta a la del segmento AB].	P	25:14
91	Ana	[Determina la longitud del segmento AI] 1.6.	I	25:22
92	Inv	¿Qué piensan?		
93	Juan	Pues, ya descartamos que, con cuadriláteros diferentes, diferentes tipos de cuadrilátero, ya sea trapecio…		
94	Ana	Paralelogramo.		
95	Juan	O que no sea, que sea paralelogramo, o que no sea, ningún par de lados sean paralelos, se pueden construir… entonces yo creo que tiene que ver con algo de las bisectrices, tiene que ver con el tema de…		
96	Ana	No sé.		
97	Juan	Es que no sabemos que otra condición… Bueno, no porque si las bisectrices, ya dijimos que para que sean perpendiculares, tienen que haber lados paralelos.		
98	Ana	¿Y si trazamos una diagonal? [Señala los puntos A y C] es que hay puntos medios y este va a ser paralelo a un lado de un triángulo. Acá hay un triángulo ABC ¿sí? tal vez haya que, no sé, que algo sea congruente. No sé, espérate a ver… [determina el segmento AC]	P I	27:40 28:06
99	Juan	Estos triángulos, mira.		
100	Ana	Sí, estos.		
101	Juan	Este con este y este con este [refiriéndose a los triángulos determinados por las diagonales en el cuadrilátero ABCI].		
102	Juan	¿Me dejas ver otra vez el enunciado? [Ana abre el archivo] Entonces, si el cuadrilátero ABCD tiene que cumplir unas propiedades para que se tenga un rectángulo. Entonces… [regresa a Geogebra]	L C	29:07 29:30

103	Inv	¿Qué piensan?		
104	Juan	No pues, me tiene confundido el hecho de que un lado si tenga con paralelas y con otro no [construcción 1]. Por otro lado, que no se tenga con paralelas [construcción 3].		
105	Ana	No influye.		
106	Inv	¿Por qué confundido?		
107	Juan	Porque digamos, la manera más, que uno caracteriza los cuadriláteros, una de las maneras más fácil es esa. Porque también está la congruencia de los lados, pero tampoco se tiene por ese lado. Se tiene un caso en que no tienen que ser congruentes los lados para que se tenga un rectángulo… [Observa la pantalla] Ah sí, que de pronto las diagonales sean perpendiculares.		

Aunque en un momento inicial Juan sospecha de que el trapecio ABCI podría ser isósceles y solicita a Ana que arrastre el punto I para que los segmentos AB y CI sean congruentes [Planeación], el desarrollo de esta solicitud, por parte de Ana [Implementación] lo lleva a descartar tal posibilidad, pues el cuadrilátero determinado por los puntos medios no es un rectángulo. Juan considera ahora que posiblemente algunos lados de este cuadrilátero sean congruentes [Planeación], pero al determinar las longitudes de los mismos [Implementación] se da cuenta que esto no es verdad. Con base en el trabajo que han realizado hasta ahora, Juan y Ana mencionan [93 – 95] que es posible obtener un rectángulo, aun si no se cuenta con lados paralelos o cuadriláteros especiales conocidos por ellos, como el trapecio o el paralelogramo y que posiblemente la propiedad del cuadrilátero esté relacionada con sus bisectrices. Sin embargo, este último supuesto no es desarrollado por un comentario que Juan realiza, retomando ideas del primer problema abordado.

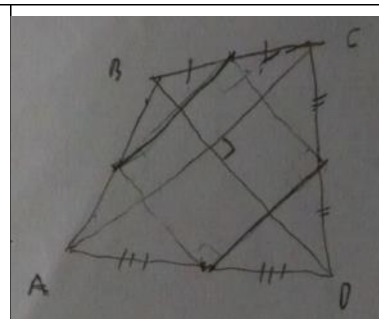
Ante tal panorama, Ana propone [Planeación] construir una diagonal del cuadrilátero ABCI [98], manifestando que por un hecho geométrico este segmento será paralelo a uno de los lados del cuadrilátero JHGK. Sin esperar respuesta de Juan, construye este segmento [Implementación] pero este no le permite avanzar en la resolución del problema. Juan retoma el enunciado del problema [Lectura], realiza una lectura del mismo y lo expresa en palabras propias para dar significado al mismo [Comprensión]. Ana y Juan expresan en este punto que sienten confusión porque el rectángulo ha sido obtenido en cuadriláteros que pueden o no cumplir la condición de tener lados paralelos o congruentes y que esto no les ha permitido caracterizar el cuadrilátero ABCD, tomando como referente alguno conocido, de acuerdo a estas propiedades. De repente, sin explicar cómo llego a esto, Juan señala que podría considerarse que las diagonales sean perpendiculares [107].

108	Ana	Um.		

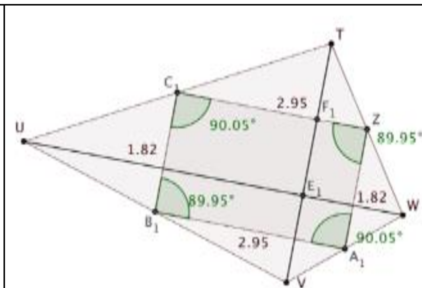
109	Juan	¿Cierto? es la única.		
110	Ana	Puede ser. Voy a quitar estas de acá [construcción del paralelogramo para despejar la imagen. Teniendo las diagonales del cuadrilátero ABCI determina su punto de intersección D1 y mide el ángulo BD1C, esta medida es 90.08].	V	31:48
111	Juan	90.08. Y ahora este [señala la tercera construcción, del cuadrilátero sin propiedades]		
112	Ana	Espera amplio [zoom en la pantalla, determina las diagonales del cuadrilátero UTWV, la intersección de estos segmentos, punto E1, y la medida del ángulo TE1U, la cual da 90.09]. Pues sí.		
113	Juan	Valores muy cercanos al ángulo recto. Sí, yo creo que esa es la condición.		
114	Ana	Sí.		
115	Juan	Que las diagonales sean perpendiculares.		
116	Ana	Sí, yo creo que sí.		
117	Juan	Porque ya vimos que ni siendo congruentes, ni teniendo lados congruentes ni teniendo lados paralelos. Yo haría la conjetura así [escribe en la hoja]. Entonces, dado un cuadrilátero, dado un cuadrilátero…	S	34:07
118	Ana	Sus puntos medios.		
119	Juan	Si sus diagonales son perpendiculares, entonces el cuadrilátero determinado.		
120	Ana	Por los puntos medios de cada segmento.		
121	Juan	Por los puntos medios de los lados del cuadrilátero dado es rectángulo. Listo [vuelve a leerla].		

De acuerdo a Juan, esta es la única posibilidad que falta por considerar. Ana apoya esta idea y procede a construir las diagonales del cuadrilátero ABCI con el fin de verificar el cumplimiento de lo expuesto por Juan [Verificación]. Una vez realiza esto, toma la medida del ángulo determinado por las diagonales y esta es muy cercana a 90 [110]. Este resultado motiva a Juan a pedirle a Ana que verifique si en el cuadrilátero UTWV, sin propiedades de paralelismo, se satisface también la perpendicularidad de las diagonales. Cuando Ana realiza esto, se dan cuenta que la medida es también muy cercana a 90, resultado que lleva a Juan a afirmar que esa es la propiedad que deben satisfacer los cuadriláteros [113 – 115]. A continuación, Juan inicia a formular una conjetura que recoge los resultados del trabajo realizado [Síntesis], una vez la enuncia junto a Ana, proceden a revisarla [121].

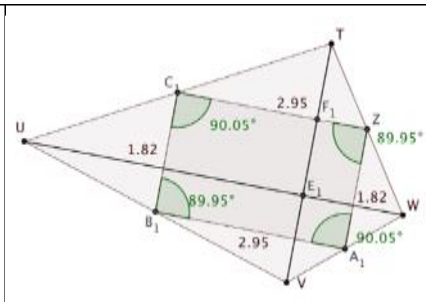
122	Inv	¿Qué van a hacer ahora?		
123	Gru	La justificación.	A	35:54
124	Ana	Hagámosla con este, ¿sí? [señala la última construcción hecha, donde el cuadrilátero no tiene propiedades]		

125	Juan	Sí. Entonces, por los puntos medios tenemos congruentes, segmentos congruentes.
126	Ana	No, ahí… [le indica a Juan que trabajen en la hoja, donde tiene dibujada la situación trabajada] 
127	Juan	Entonces digamos que este es perpendicular [se refiere a las diagonales], puntos medios [de los lados del cuadrilátero], tenemos estas congruencias [determinados por los puntos medios]. Entonces yo creo que hay que mirar congruencia de triángulos para determinar estos lados congruentes, pero…
128	Ana	Por semejanza.
129	Inv	¿Qué buscan?
130	Juan	Es que primero queremos buscar que los segmentos determinados por los puntos medios, los opuestos, sean congruentes. Entonces…
131	Ana	¿Cómo fue lo que dijiste? Vuélvelo a repetir.
132	Juan	[Regresan a la construcción en Geogebra] Queremos determinar que los segmentos opuestos sean congruentes. Pero… Sabemos que los puntos medios de un triángulo…
133	Ana	Van a ser paralelos.
134	Juan	Todo este segmento, segmento C1 con B1 es paralelo a…
135	Ana	[segmento] TV.
136	Juan	Lo mismo para, [segmento] VT es paralelo a
137	Ana	[segmento] ZA1.
138	Juan	¿Cierto? son paralelos. Lo mismo con este segmento [con el mouse señala segmento B1A1], B1A1 es paralelo a UW. Este también sería paralelo [con el mouse señala el segmento C1Z y UW], ¿cierto? serían paralelos. Entonces [observan pantalla].

El grupo inicia ahora a justificar la conjetura [Análisis] y para ello se apoya en el cuadrilátero UVWT, aquel que fue construido sin propiedades, pero Ana propone que se apoyen en la representación hecha en papel. Juan retoma la única condición con la que cuentan en su conjetura, la perpendicularidad de las diagonales y los puntos medios de los lados del cuadrilátero. Él también descompone el problema que abordan, reconociendo que primero deben justificar que los lados opuestos del cuadrilátero determinado por los puntos medios deben ser congruentes [130]. Los dos estudiantes inician a involucrar algunos hechos geométricos de acuerdo a las condiciones con las que cuentan, esto les permite reconocer el paralelismo de las diagonales y los lados del cuadrilátero determinado por los puntos medios [132 – 138].

139	Ana	Correspondientes…		
140	Juan	¿Qué ángulos?		
141	Ana	UE1T correspondiente con, acá va otro punto [se refiere a la intersección del segmento C1Z1 y TV], para que estos sean correspondientes, lo mismo acá [señalando la intersección entre el segmento TV y segmento A1B1]. No, pero igual no, no da así.		
142	Juan	Es que mira, el segmento ZC1 es paralelo a UW y a su vez es paralelo a B1A1, entonces por transitividad de paralelas, el segmento A1B1 es paralelo a C1Z, ¿cierto?, son paralelos. Lo mismo para el segmento C1B1 y ZA1, son paralelas a una misma recta, entonces por transitividad son paralelos. Transitividad de paralelas…		
143	Ana	De hecho, también por un hecho, si es rectángulo es paralelogramo y por definición de paralelogramo ya son [paralelas]. Tenemos el rectángulo, entonces por el hecho geométrico rectángulo-paralelogramo, tenemos que el cuadrilátero C1ZA1B1 es paralelogramo y por definición tenemos que estos segmentos son paralelos, los opuestos.		
144	Juan	¿Los opuestos son paralelos? Es que nosotros no sabemos si es rectángulo.		
145	Ana	Um, sí.	A	
146	Juan	Lo que sí sabemos es que son paralelas. Entonces ya podemos decir que es paralelogramo. Por hecho geométrico, los [lados] opuestos son congruentes.		
147	Ana	Sí. La dije al revés.		
148	Juan	Son congruentes. Listo ya tenemos que es un paralelogramo y que este ángulo es recto [señala el ángulo UE1T]. Tiene que servir para algo que sea perpendicular esto [las diagonales]. Bueno, entonces usando los ángulos… sabemos que las diagonales son perpendiculares y tomamos esta como una transversal [señala el segmento TV] ¿sí? de las rectas A1B1 y ZC1. Entonces, el ángulo que se formaría acá, perdón. Ya sabemos que esta [segmento B1C1] es paralela a esta [A1Z] y este [señala el segmento C1Z]… Sí, este ángulo [UE1T] es el mismo de acá [señala un ángulo que es correspondiente a UE1T]. 		

Ana intenta involucrar ángulos correspondientes pero su idea no trasciende [141]. Juan por su parte argumenta que los lados del cuadrilátero determinado por los puntos medios son paralelos, apoyándose en el paralelismo de estos con respecto a las diagonales del cuadrilátero UTWV, con esto justifica que dicho cuadrilátero es un paralelogramo [146]. Ana intenta proveer una justificación alterna para garantizar que el cuadrilátero determinado por los puntos medios es paralelogramo, pero esta no es aceptada por Juan, quien le señala que la estructura condicional involucrada no es correcta dadas las condiciones del problema. Juan señala que en ese punto cuentan con dos cosas para justificar lo que la conjetura establece, por un lado, que un cuadrilátero es paralelogramo y por otro lado que las diagonales del cuadrilátero UTWV son perpendiculares. Al final, Juan intenta involucrar elementos asociados con ángulos alternos internos para avanzar en la justificación de la conjetura.

149	Ana	Sí, es que mira. Sale, alternos internos, bueno acá sería otro punto [señala la intersección de los segmentos UW y B1C1], ah no, con este también [señala el punto B1]. [Ángulo] B1C1Z sería alterno interno con, acá sería otro punto [intersección entre segmentos VT y ZC1]. ¿Sí? para que este [B1C1Z] y este [ángulo alterno interno del anterior, para el cual la transversal es el segmento ZC1] sean alternos internos, congruentes, y por correspondientes, este [el anterior ángulo nombrado] va a ser congruente con este [UE1T] y por transitividad este [UE1T] con este [B1C1Z], ¿no?		
105	Juan	Otra vez. Otra vez.		
151	Ana	Espera organizo bien la…		
152	Juan	Porque ya sabemos también, por el hecho geométrico de los puntos medios de un triángulo, que este segmento [B1C1] es un medio de este [TV], entonces, como este [ZA1] también es un medio de este [VT], entonces este segmento [B1C1], por propiedad de los reales, sería igual a este [ZA1]. ¿Sí me hago entender? O sea, este segmento [B1C1] mide un medio de TV y este [A1Z] también mide un medio de VT, igualamos, tenemos que son congruentes y hacemos el mismo análisis para el segmento A1B1 y ZC1, como tenemos un paralelogramo con lados opuestos congruentes, entonces es un rectángulo. Un hecho geométrico.		
153	Ana	Pero no usamos este ángulo.	A	
154	Juan	No usamos ese ángulo…		
155	Ana	Es que no sé si tenga la idea. Espérate y pongo un punto acá [nombra F1 a la intersección del segmento TV y ZC1]. Mira, teniendo que ya, lo que tu dijiste, ya tenemos el rectángulo, entonces por definición de rectángulo, bueno, los ángulos [miden] 90. Ya tenemos las paralelas, esta [B1C1] y esta [VT] y por alternos internos, este ángulo [B1C1F1] sería alterno interno a este [C1F1T]. 		
156	Juan	Sí.		
157	Ana	Entonces este [C1F1T] también mide 90…		
158	Juan	Pero, ¿cómo sabemos que es 90?		
159	Ana	Por lo que ya tenemos que es rectángulo. Lo que acabaste de decir.		

160	Juan	No, pero si ya tenemos que es rectángulo, no tenemos que probar nada más.		
161	Ana	¿Y este? [Ángulo UE1T] para que este mida 90.		
162	Juan	No, es que no necesitamos, nosotros dijimos que las diagonales tienen que ser perpendiculares para que se pueda construir un rectángulo.		
163	Ana	De hecho, también podemos partir de este [ángulo UE1T], acá. Ya sabemos que es perpendicular, entonces 90, por correspondientes se tiene que el de acá [C1F1T] va a medir 90 y ahora sí por alternos internos [señala los ángulos B1C1F1 y C1F1T], este [B1C1F1] va a medir 90. Ahí ya salió el rectángulo.		
164	Juan	Sí, también da aquí, porque construimos este cuadrilátero, este nuevo cuadrilátero [con el mouse recorre el cuadrilátero determinado por C1, F1, E1 y la intersección de los segmentos UW y C1B1] y como ya sabemos que esta recta es paralela a esta y esta recta paralela a esta [se refiere a los lados de dicho cuadrilátero, los cuales son paralelos], entonces tenemos un paralelogramo y opuestos, entonces este es 90, por opuestos este [B1C1F1] tiene que medir 90 y hacemos el mismo análisis para estos cuadriláteros [los cuadriláteros que están al interior del cuadrilátero UTWV] y concluimos que cada ángulo va a medir 90 y por el análisis de los puntos medios, tenemos los segmentos opuestos congruentes y ahí ya justificamos que es un rectángulo. Que todos los ángulos son 90 y los lados opuestos son congruentes, son iguales.		
165	Ana	Sí.		

Ana da continuidad a la idea de Juan e intenta proveer una justificación involucrando ángulos alternos internos [152]. Sin embargo, al tratar de justificar la conjetura no se percata de que toma como datos dados aquellos que deben ser justificados, elaborando así una justificación en un sentido contrario al que se esperaría. Juan la hace detectar su error [160] y señala que lo único con lo que cuentan es la perpendicularidad de las diagonales y que la propiedad de ser rectángulo es la que debe ser justificada [162]. Ana, como respuesta a esta indicación, elabora una justificación con base en las condiciones de la conjetura que retoma los argumentos expuestos en su anterior intervención, con lo que justifica que el cuadrilátero determinado por los puntos medios es un rectángulo [163]. Juan no se queda atrás y también provee una justificación alterna a la conjetura estudiada, utilizando otros hechos geométricos distintos a los involucrados por Ana. De esta forma dan por finalizado el trabajo.

DETERMINANDO UN NUEVO CUADRILÁTERO

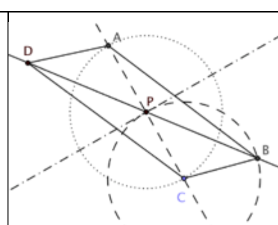
En el último problema propuesto se solicitaba que, a partir de una configuración y construcciones realizadas, se identificaran los tipos de cuadrilátero que podían determinarse y se proveyera una justificación a tal resultado. Ambos grupos resolvieron el problema, requiriendo 22 minutos en el caso de Caro y Paul y 85 minutos en el caso de Ana y Juan.

El trabajo de Caro y Paul

Al iniciar la lectura del enunciado del problema [Lectura] Paul propone que se representen progresivamente las condiciones expuestas en este. De esta forma, a la vez que van leyendo cada condición del problema, esta se va representando en Geogebra.

	Caro	Dibuje P y una recta r que lo contiene.	L	00:00
1	Paul	Pues, empecemos a dibujar, ¿no? [Dibuja un punto y lo llama P] y una recta r que lo contenga… [traza una recta que contiene a P]	P	00:09
			I	00:11
2	Caro	Construya la recta perpendicular por el punto P a la recta r [en Geogebra, con la herramienta Recta Perpendicular, Paul construye dicha recta]. Dibuje un punto C en esta nueva recta distinto al punto P [Paul realiza esto en Geogebra]. Construya un punto A de tal forma que P sea punto medio del segmento AC.	L	00:26
3	Paul	… Digamos, una circunferencia…		
4	Caro	Con centro…Ajá… [Paul construye una circunferencia con centro P y radio PC] Punto de intersección [Paul selecciona la herramienta Punto de intersección y marca la segunda intersección de la circunferencia construida con la recta PC]		
5	Paul	¿Cómo se llamaba el punto?		
6	Caro	C, eh,… A [Paul nombra esta intersección como A y oculta la circunferencia]. En el semiplano determinado por la recta r que contiene al punto A dibuje un punto D [Paul realiza esto]. Construya la recta PD. Construya la circunferencia con centro C y radio CP. Sea B el segundo punto de intersección de la recta PD y la circunferencia construida con centro en C [todas estas indicaciones son representadas por Paul].		
7	Paul	O sea, este… [señala con el mouse el punto en mención]		
8	Caro	Ujum [Paul Construye el punto].		
9	Paul	¿Cómo se llamaba el punto?		
10	Caro	No recuerdo [Paul abre el archivo con el problema]. B [Paul nombre este último punto B]. Construya el cuadrilátero ABCD [Paul realiza esto trazando los segmentos correspondientes]. Elabore conjeturas sobre los tipos de cuadriláteros que pueden determinarse, describiendo las formas en que se obtienen dichos cuadriláteros. Justifique estas conjeturas. ¿Qué propiedad debe cumplir el punto D para que el cuadrilátero ABCD sea paralelogramo? [Paul regresa a Geogebra]		

Hasta este punto el grupo ha representado en Geogebra las condiciones que el problema contempla sin dificultad alguna.

11	Paul	Este es parecido a paralelogramo.		V	03:43

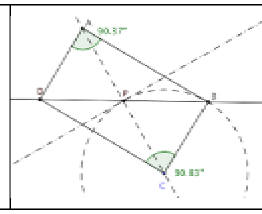
12	Caro	Um, pues, ahí en Relación [herramienta de Geogebra].		
13	Paul	[Selecciona la herramienta Relación] Pero creo que eso solo funciona cuando uno los construye con esas propiedades.		
14	Caro	No…		
15	Paul	¿No? ¿y qué…?		
16	Caro	[Segmento] AB y [segmento] DC [Paul selecciona los segmentos señalados, Geogebra dice que no tienen la misma longitud].		
17	Paul	Eh, no. No tiene la misma longitud.		
18	Caro	Ok.		
19	Paul	Entonces no es paralelogramo. Bueno, entonces pues miremos qué tipo de cuadrilátero es mediante los ángulos [Determina la medida del ángulo DAB].	P	04:32
20	Caro	Mira si estos dos segmentos tienen la misma distancia, DA y CB.	I	04:40
21	Paul	¿La misma distancia a P?		
22	Caro	No, no. O sea, si DA y CB tienen la misma distancia.		
23	Paul	Um, la misma longitud… [determina la longitud de esos segmentos, sus valores son 3.95 y 4.16]		
24	Caro	No…		
25	Paul	No.		
26	Caro	O sea, ahí en ese caso sería un trapezoide.		
27	Paul	Sí.		
28	Caro	El ángulo… [Paul determina las longitudes de los otros dos lados del cuadrilátero]		
29	Paul	Y los ángulos [determina la medida del ángulo DCB].		

Una vez finalizan la construcción, Paul indica que el cuadrilátero representado en pantalla parece ya un paralelogramo, por lo que Caro le sugiere que verifique [Verificación] si efectivamente esto es cierto. Paul, con ayuda de las herramientas de Geogebra, obtiene que los segmentos AB y CD no tienen la misma longitud [17], por lo que Paul asegura que el cuadrilátero no es realmente un paralelogramo. Paul intenta proponer [Planeación] una estrategia para buscar una solución al problema [19] pero Caro interrumpe esto y le solicita que realice el mismo proceso de verificación en el cuadrilátero con los segmentos DA y CB [Implementación]. Paul realiza esto y obtiene que los segmentos no son congruentes, lo que lleva a Caro a establecer que el cuadrilátero, tal como aparece representado, es un trapezoide [26]. Paul retoma su idea de determinar el tipo de cuadrilátero a través de los ángulos y para ello determina las medidas de los ángulos DAB y DCB. Ya en pantalla cuenta con esta información y las longitudes de los lados del cuadrilátero.

30	Caro	O sea, ¿qué propiedades debe tener D para que eso sea un paralelogramo? ¿es qué dice? [Paul arrastra el punto D] Ven devuélvete al problema [Paul abre al archivo con el problema]. Elabore conjeturas sobre los tipos de cuadriláteros que pueden determinarse, escribiendo la forma en que se obtienen dichos cuadriláteros… ¿Qué propiedad debe cumplir D para que el cuadrilátero ABCD sea un paralelogramo?	C L	05:45 06:07
31	Paul	Pues no sé si empecemos con um…	P	06:28
32	Caro	Pues si D está en cualquier… o sea, si D está en cualquier parte de… bueno, en ese semiplano determinado por la recta r pues es un… un trapezoide ¿sí? [Paul arrastra el punto D sobre el semiplano en mención]	S	06:31
33	Paul	¿Si lo hiciéramos coincidir para que P fuera el punto medio del segmento BD? a ver qué pasa…	P	06:52
34	Caro	Ujum [Paul determina las distancias PD y PB, estas marcan 3.31 y 3.38 respectivamente. Ahora arrastra a D tratando de buscar que estas sean iguales. Ahora mueve al punto C con la misma intención]. [Paul intenta arrastrar a B] No, el punto B no se puede mover. [Paul arrastra al punto D con la misma intención] Ahí, ahí… [Paul logra que las dos distancias sean prácticamente iguales 2.9 y 2.95] Pues, o sea, si P es el punto medio entre D y B, ahí sí se cumpliría que fuera un paralelogramo, porque ahí se estarían bisecando sus diagonales…	I	06:58
35	Paul	¡Uh!, ujum. Sí.		

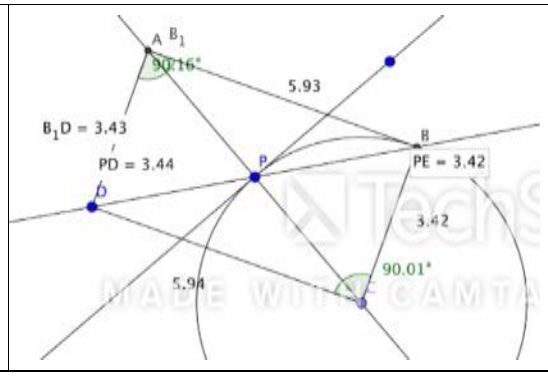
Caro intenta reformular lo que el problema solicita en términos propios [Comprensión], pero duda de su interpretación y recurre al enunciado [30] para leer lo que este solicita [Lectura]. Una vez Caro finaliza la lectura del apartado del enunciado del problema, Paul intenta proponer una forma de abordar el mismo [Planeación], pero Caro la interrumpe y señala, apoyándose en lo que hasta ahora han observado, que el cuadrilátero ABCD es un trapezoide en tanto D esté en el semiplano [Síntesis], de acuerdo a las condiciones del problema [32]. Paul retoma su iniciativa de trazar una forma de abordar el problema y propone arrastrar al punto D de tal forma que P sea punto medio del segmento BD [Planeación]. Seguido a esto, procede a determinar las longitudes de los segmentos BP y PD y arrastra a D hasta lograr su objetivo [Implementación]. El resultado en pantalla muestra un paralelogramo y es Caro quien justifica ese resultado al decir que si las diagonales se bisecan entonces el cuadrilátero será un paralelogramo [34].

36	Caro	Entonces, la condición de D sería que…	S	08:14
37	Paul	P fuera el punto medio del segmento DB.		
38	Caro	Ujum.		
39	Paul	Para que ocurriera que fuera paralelogramo. Listo, ahora miremos otros tipos de cuadrilátero. Ahora, miremos… [Mientras arrastra al punto D y lo aleja de P] pareciera que es un paralelogramo, ¿será que sí? No, pero sí ¿cierto?, ah no, sí claro… mmm, un cuadrado…	P E P	08:25 08:41 08:57

40	Caro	Para que sea un cuadrado [quieren ahora convertir el cuadrilátero en cuadrado].		
41	Paul	Tendría que… [Mientras arrastra el punto D] no lo podemos cuadrar [no puede convertir el cuadrilátero en cuadrado].	I	09:02
42	Caro	No, ve, muévelo para que el ángulo sea de 90 [Paul arrastra el punto D y logra una aproximación muy cercana a 90]. 		
43	Paul	Ahí.		
44	Caro	Pero, ¿ahí sí coinciden las distancias? [del punto P a los vértices del cuadrilátero]		
45	Paul	Ay, no, no he visto. Creo que esta no la necesitamos [etiqueta con distancia DP]		
46	Caro	No, sí. Porque es que, vamos a mirar cuando es un cuadrado. Pero entonces mira que las distancias PD y PB tienen que ser iguales o sino no se cumple		
47	Paul	Sí.		
48	Caro	O sea, no… o sea, mueve C porque C también… [Puede manipularse. Paul arrastra el punto C sobre la recta que lo contiene] Que sea de 90 [refiriéndose a que al mover al punto C, la medida del ángulo DCB sea 90].		
49	Paul	Ay, no.		
50	Caro	Pero las distancias también tienen que ser iguales [de P a D y B].		
51	Paul	Um, ¿cómo lo logro? es que, de que sean iguales… es que, ¿sabes qué pasa? es que eso no se va a poder.		

Este resultado lleva a Caro y Paul a asegurar que la condición del punto D es que el punto P sea punto medio del segmento BD [Síntesis]. Con este resultado en mente, Paul sugiere analizar el comportamiento del punto D con miras a determinar otro tipo de cuadrilátero, específicamente un cuadrado [Planeación], mientras propone este plan, arrastra el punto D a otra posición en la que se determina un paralelogramo, idea que confirma gracias a las medidas de los segmentos que ha determinado [Exploración]. Cuando intentan convertir el cuadrilátero en cuadrado [Implementación], se dan cuenta que esto no es posible, particularmente Paul es quien señala que al parecer esto no será posible [51].

52	Caro	¿Por qué no?	A	10:26
53	Paul	Porque, para que sea un cuadrado, todos los lados tienen que ser iguales, ¿sí? y entonces, eh, el segmento CB, pues la circunferencia [con centro C y radio PC] estaría en el otro semiplano, como este punto [D] tiene que pertenecer a este [semiplano], tendría que pertenecer ya al otro [semiplano] para que se formara el cuadrado, ¿sí? pues para que…		
54	Caro	En el caso más… tendría que ser P.		

55	Paul	Exacto, entonces nunca este punto [P], pues sí, aquí sí, pero como la condición es esta [estar en el semiplano que está A respecto a la recta r], entonces no puede llegar a ser… cuadrado ni cometa.		
56	Caro	Cometa tampoco. Pero rectángulo sí.		
57	Paul	Sí. O sea, tocaría ya mirar son los de, que fuera esto 90 [ángulos del cuadrilátero ABCD] ¿cierto?	P	11:20
58	Caro	Para que sea un rectángulo.		
59	Paul	Sí [Arrastra los puntos D y C para obtener nuevamente un rectángulo].	V	11:50
60	Caro	[Paul manipula un punto por el que pasa la recta r distinto a los involucrados en el problema] No, no muevas ese punto.		
61	Paul	¿Cuál muevo?		
62	Caro	O sea, mueve ese [C] o mueve D [Paul manipula los puntos D y C buscando que el cuadrilátero sea rectángulo].		
63	Paul	Um. Ahí, ¿cierto? Aproximado. 		

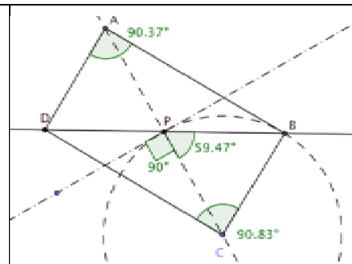
Caro cuestiona a Paul por su afirmación [52] y él le comenta [Análisis] que construir un cuadrado no es posible debido a que esto involucraría tener los segmentos del cuadrilátero congruentes, con base en esto, D debería pertenecer a la circunferencia de centro C. Sin embrago, dadas las condiciones del problema, esto no es posible [53, 55]. Caro complementa esta idea señalando que entonces el cuadrilátero no podría ser tampoco una cometa pero que posiblemente sí un rectángulo [56]. Este resultado motiva a los estudiantes a convertir el cuadrilátero en un rectángulo, con miras a verificar si esto es posible y descubrir las propiedades del punto D en dicho caso [Planeación]. Paul arrastra al punto D con este objetivo en mente [Verificación] y logra que en el cuadrilátero ABCD las medidas de sus ángulos sean muy cercanas a 90 [63].

64	Caro	No, pero yo creo que sí puede ser cuadrado.		
65	Paul	Pero, es que, para ser cuadrado, lo que digo, o sea este punto D tendría que estar en la circunferencia, pertenecer a la circunferencia y como el punto [P] pertenece a la recta que está determinando los dos semiplanos, pues nunca va a, la circunferencia pasar al otro semiplano, bueno, parte de la circunferencia pasar allá.		
66	Caro	Um, buen punto. Ahí es un rectángulo ¿cierto?		

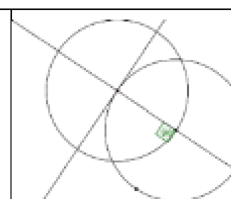
67	Paul	O sea, no se puede ser ni rombo, o sea, no se puede determinar ni cuadrado ni rombo.		
68	Caro	No se pueden determinar rombos.		
69	Paul	Sí.		
70	Caro	Ok.		
71	Paul	Y ahora…		
72	Caro	Ese es un… un ¿un qué?		
73	Paul	Un rectángulo.		
74	Caro	Um sí. Las diagonales se bisecan y… los ángulos son, pues aproximadamente, de 90 grados. Sí.		
75	Paul	Um, ¿qué propiedad cumple… [D]?		
76	Caro	Pues igual, D tiene que estar, o sea, P tiene…, o sea, D tiene que estar a la distancia precisa para que P sea el punto medio de D y B.	S	13:52
77	Paul	Sí, porque es paralelogramo un rectángulo.		
78	Caro	Sí. Listo.		

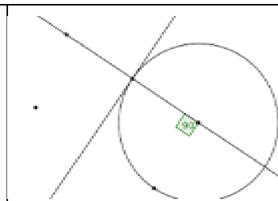
Cuando en pantalla logran tener un rectángulo, Caro interrumpe mencionando que para ella sí es posible que se configure un cuadrado [64], a lo que Paul retoma las ideas que anteriormente había utilizado para convencer a Caro de que esto no era posible. Al final, Caro acepta este resultado y Paul le comenta también que dado el contexto no es posible obtener ni rombo ni cuadrado, idea aceptada por Caro [67 - 70]. En pantalla tienen una configuración que corresponde a la de un rectángulo. Los valores de las longitudes de los segmentos y las medidas de los ángulos que se tienen llevan a Caro a confirmar que el cuadrilátero es un rectángulo, en cuanto sus diagonales se bisecan y cuenta con ángulos de 90 [74]. Paul le pregunta por la propiedad que el punto D debe cumplir en ese caso, con el fin de obtener un rectángulo, y Caro solamente responde que la condición es que el punto P sea punto medio del segmento BD, igual que en el caso del paralelogramo [Síntesis]. Para ambas este resultado es acertado y no se dan cuenta que hay condiciones que falta por declarar.

79	Paul	Pero ahora ¿cómo justificamos el de 90?… y si hacemos coincidir, o sea, partir de, digamos otra circunferencia acá [construye una circunferencia en otro sitio de la pantalla] y…	A	14:02
80	Caro	Ven, no, toma [las medidas de] los ángulos BPC y acá trae otro punto [solicita dibujar un nuevo punto, pero no especifica dónde].	P	14:19
81	Paul	Estos ángulos, ¿sí? [señala el ángulo ABC]		
82	Caro	No, o sea. Hagamos un punto [ubica un nuevo punto en la recta r]	I	14:49

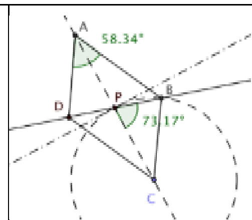
83	Inv	¿Qué estás haciendo?		
84	Caro	Voy a tomar los ángulos BPC, la medida de los ángulos…		
85	Paul	¿De cuáles?, ah, de los… ¿que forman los triángulos?		
86	Caro	Es que quiero mirar [determina la medida del ángulo BPC] de pronto si esa recta es la bisectriz del ángulo [determina la medida del ángulo determinado por B, P y el nuevo punto construido sobre r].		
87	Paul	¿Y si creamos la construcción para que hagamos coincidir la circunferencia que sea exactamente de 90?	P	15:28
88	Caro	Espérame un momento [termina de medir los ángulos mencionados]. 		
89	Paul	Vale.	I	15:36
90	Caro	Um… [reacción al ver las medidas de los ángulos]		
91	Paul	Ah, pues sí, porque son perpendiculares [las rectas r y recta AP].		
92	Caro	Ah, es cierto. Buen punto. Es que creí que de pronto esta recta que era perpendicular a r, esta recta, era bisectriz del ángulo… [Nombra H al nuevo punto construido], que la recta PC, bueno, que el rayo PC era bisectriz del ángulo BPH.		
93	Paul	Um.		

Paul quiere saber cómo justificar que uno de los ángulos del cuadrilátero tiene medida de 90 [Análisis], pero Caro interrumpe su intervención y propone llevar a cabo algunas acciones [Planeación] para determinar las medidas de algunos ángulos sin explicar el motivo de ello [80]. Mientras realizan las acciones correspondientes [Implementación], Caro menciona que quiere verificar si una recta que se ha construido es bisectriz de uno de los ángulos, aunque no es muy claro este objetivo. En ese punto Paul propone realizar una construcción alternativa [Planeación], pero Caro le pide que espere mientras termina de realizar su construcción. Al final, Caro se da cuenta que su conjetura no es acertada y descarta las acciones que venía realizando.

94	Caro	Listo, ahora ¿qué es lo que ibas a hacer?	P	16:24
95	Paul	Yo estaba pensando en hacerla desde… o sea, a partir de esta circunferencia [hay una nueva circunferencia en otra parte de la pantalla] hacer que coincida ya el de 90. O sea,… [Construye un ángulo cuya medida es 90 tomando como uno de sus lados el segmento determinado por el centro de la nueva circunferencia y un punto sobre esta]. Que este [punto sobre la circunferencia] fuera P, o sea, tendríamos que trazar 	I	16:43

		esto [recta determinada por el centro y punto de la circunferencia], la perpendicular a esta [a la recta construida por el punto de la circunferencia que llamó P] por este punto [el nuevo punto P. Traza además la circunferencia con centro en P y radio P y el centro de la circunferencia].		
96	Inv	¿Qué estás haciendo ahí?		
97	Paul	Eh, haciendo, o sea, reconstruyendo esto [lo que se había construido anteriormente] pero ya que el ángulo que determine, el ángulo que aquí determina, bueno, como aquí [construcción anterior] estamos haciendo coincidir los ángulos DAB y DCB para que sean de 90, entonces de una vez lo estamos construyendo de 90 para ver qué pasa [construye el segundo punto de intersección de la segunda circunferencia y la recta que inicialmente construyó, luego oculta esta circunferencia]. ¿Qué me falta?, ah el punto D que pertenezca al otro semiplano [construye un punto en un semiplano determinado por la recta que se construyó como perpendicular]. 		
98	Caro	No…		
99	Paul	O sea, no, espérame. O sea, estoy haciendo otra vez la construcción, pero que el ángulo que necesitamos sea ya de 90. Ah, pero ese no es el que necesitamos de 90.		
100	Caro	No no.		
101	Paul	¿O sí? No, sí, espera [intenta arrastrar algunos puntos y los nombra de acuerdo al enunciado del problema, pero no obtiene una configuración que se asemeje a lo deseado]		
102	Caro	¿Cómo es? [Revisa el enunciado del problema y las condiciones mencionadas en este] O sea, ese no sirve [refiriéndose a la construcción realizada]		
103	Paul	O sea, ¿pero si ves?, hay algo interesante es que digamos…		
104	Caro	No [revisan la construcción, pero Caro no acepta la forma en que se ubicaron los puntos. Paul señala algunas condiciones del enunciado del problema que tuvo en cuenta y se vislumbran en su construcción. Al final Caro señala que hay un error en la construcción porque el ángulo que se construyó recto no era el indicado]. ¿Cómo es? [condiciones de los puntos involucrados]	L A	20:31 20:49
105	Paul	Buen punto [borran la construcción realizada].		
106	Caro	Pero ahora sí vuélvela a hacer.	P	22:14
107	Paul	Pero, ¿será que sí funciona?		
108	Caro	Es que no entiendo para qué estás haciendo eso…		
109	Paul	No, sí, ya tampoco entendí para que lo estoy haciendo… O sea, yo quería construir de una vez este [ángulo DCB] para que fuera de 90, pero ya no se puede.		

Ahora Caro quiere desarrollar la idea de Paul, por lo cual le pide que explique su estrategia [Planeación]. En esencia, Paul propone realizar una construcción que involucre los objetos geométricos dados en el problema y sus relaciones; además, que uno de los ángulos del cuadrilátero sea recto desde el principio. Desafortunadamente, el desarrollo de la propuesta no es afortunada en cuanto no logra reproducir la configuración dada a través del problema. Caro no comprende la idea que expone Paul y retoma el enunciado del problema [Lectura], revisando las condiciones que el mismo expone y ayudando a Paul a realizar la construcción. La propuesta de Paul no es clara ni afortunada y Caro hacer ver esto al analizar las acciones realizadas en Geogebra [Análisis]. Después de ello, Caro le pide a Paul que repita su construcción [Planeación], pero ella duda y opta por abortar su estrategia.

110	Caro	Bueno, pues en ese caso, ¿sí sería un rectángulo?, mira qué propiedad, mira si AB y DC son paralelas. Con Relación.	V	22:47
111	Paul	O sea, sí tienen que ser paralelos, porque, pues, como ya habíamos dicho que si este punto [señala a D], o sea, si P es el punto medio del segmento BD, es un paralelogramo, pues entonces tienen que ser [señala los segmentos AB y DC. Luego selecciona la herramienta Relación. Al usarla esta señala que no tienen la misma longitud]. Aquí no nos va a decir, nos va a decir que no tienen la misma longitud.		
112	Caro	Espérate, que yo quiero ver una cosa acá [inicia a arrastrar el punto C hacia P].	E	23:24
113	Inv	¿Qué vas a hacer?		
114	Caro	Eh. Voy a, o sea, que la distancia AC sea menor, a ver si de pronto sí puedo lograr que el cuadrilátero ABCD sea un cuadrado [arrastra el punto D y este se acerca a P y a la recta r]. De pronto llegara a ser un rombo, ¿no? ¿o una cometa? 		
115	Paul	Mmm…		

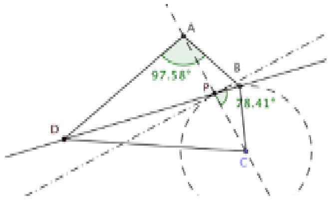
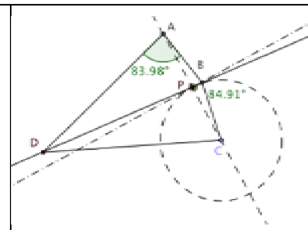
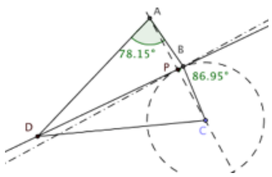
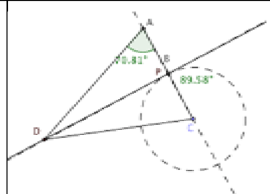
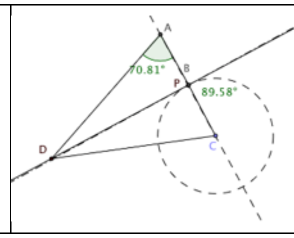
Habiendo descartado la estrategia de Paul, los estudiantes retoman la construcción hecha inicialmente, donde los vértices se han arrastrado hasta determinar un rectángulo a simple vista. Caro solicita corroborar [Verificación] si los lados del cuadrilátero son realmente paralelos, ante lo cual Paul asegura que esto debe cumplirse en cuanto cumple que el punto P es punto medio del segmento BD. Paul utiliza la herramienta Relación de Geogebra, pero debido a la precisión de los valores en pantalla, el resultado arrojado es que los segmentos no son congruentes. Caro no da desarrollo a la idea que propuso anteriormente y ahora inicia a arrastrar el punto C, acercándolo hacia P [Exploración] con el fin de que el cuadrilátero ABCD sea un cuadrado, un rombo o una cometa [114]. Esto muestra que Caro no tiene en consideración los argumentos que Paul expuso anteriormente.

116	Caro	Seguiría siendo un paralelogramo, ¿cierto?	E	

117	Paul	Sí… El rombo no se puede. La cometa… no sé.		
118	Caro	No, la cometa tampoco.		
119	Paul	¿Por qué?		
120	Caro	Pues por lo que tu explicas. Porque para que DC y BC sean congruentes, D tendría que estar en este semiplano [respecto a la recta r donde está C].		
121	Paul	Pero, ah bueno. No sé, y si digamos los lados congruentes fueran AD y DC y los otros sean los… ¿si me entiendes? una cometa como…	P	24:57
122	Caro	Pues no sé… mira a ver.		
123	Paul	[Inicia a arrastrar algunos puntos] Para que sea eh…	I	25:11
124	Caro	¿Para que sea qué?		
125	Paul	Estaba pensando si había alguna propiedad para las cometas… para cualquiera, para no hacerlo por la definición.		
126	Caro	¿Cómo así? no te entiendo.		
127	Paul	O sea, ¿qué propiedad tenemos de las cometas?		
128	Caro	O sea, que me acuerde, que los lados adyacentes son congruentes [Paul sigue arrastrando algunos puntos, tratando de obtener una cometa]. Es que creo que lo que no nos permite que se cumpla eso es la perpendicularidad.		

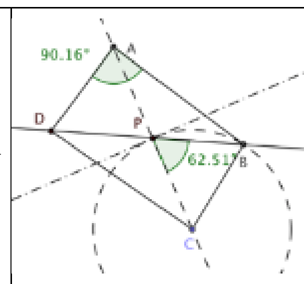
Mientras Caro continúa arrastrando los vértices del cuadrilátero, Paul le comenta que el rombo no se puede obtener pero que sobre la cometa no tiene certeza, ante lo cual Caro responde que tampoco es posible obtener dicho cuadrilátero, teniendo en cuenta los argumentos que Paul expuso en un momento anterior. Paul no comparte esta idea, pues como el manifiesta [121], es posible que los lados congruentes sean otros y no los que el en algún momento descartó. Con base en esto, Paul propone que se considere una configuración de la cometa donde los lados congruentes sean otros distintos a los estudiados [Planeación], una vez Caro acepta su propuesta, Paul inicia a arrastrar los puntos para lograr su objetivo [Implementación]. Algunos intentos de Paul por lograr esto no son afortunados y en su conversación con Caro buscan propiedades que les puedan servir para alcanzar su meta sin éxito alguno, hasta que Caro considera que posiblemente convertir al cuadrilátero en cometa no sea posible debido a la perpendicularidad de las dos rectas [128].

129	Inv	¿Que se cumpla qué?		
130	Caro	Que, digamos, pues lo de la cometa, que AB y BC sean congruentes. Lo que no permite creo que es la perpendicularidad de la recta AC y la recta r.		
131	Inv	¿Por qué?		
132	Caro	Es que, estaba mirando, pero no sé, eso es lo que estoy tratando de mirar porque creo que es eso lo que no nos permite…	E	26:54

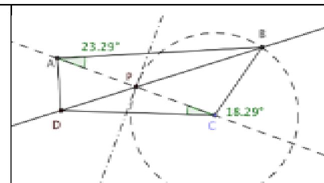
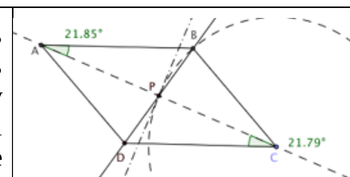
<table>
<tr><td></td><td></td><td>
[Paul sigue arrastrando los puntos manipulables, llegando a una configuración cercana a una cometa]</td><td>
[Paul sigue manipulando la construcción y el punto B se acerca al punto P]</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>
[Ambas miran fijamente la pantalla mientras Paul sigue manipulando los puntos]</td><td>
[Al final, P y B son el mismo punto]</td></tr>
<tr><td>133</td><td>Paul</td><td colspan="2">Mira…</td></tr>
<tr><td>134</td><td>Caro</td><td colspan="2">¡Ay, mira!</td></tr>
<tr><td>135</td><td>Paul</td><td colspan="2">Solo coinciden cuando es el punto medio… o sea, um ¿cuáles son las que son perpendiculares? esta [recta AC] y esta [recta PD] ¿cierto?</td></tr>
<tr><td>136</td><td>Caro</td><td colspan="2">Um, no. Creo que es [recta] AC perpendicular a… ah no, es la recta r perpendicular a la recta AC.</td></tr>
<tr><td>137</td><td>Paul</td><td colspan="2">Ah, son estas dos, esta [AC] y esta [r]. Yo creo que tiene algo que ver con la perpendicularidad, pero es que mira, para que el segmento AB y el segmento BC fueran de la misma longitud, este punto B tendría que pertenecer a la mediatriz del segmento AC, para que estuviera a la misma longitud.</td></tr>
<tr><td>138</td><td>Caro</td><td colspan="2">Ujum, sí.</td></tr>
<tr><td>139</td><td>Paul</td><td colspan="2">¿Cierto? entonces, esta línea, o sea esta recta [DP] tendría que coincidir con esta [r].</td></tr>
<tr><td>140</td><td>Caro</td><td>Ujum [Paul arrastra los puntos haciendo coincidir la recta r y la recta DP]. O sea, D tendría que ser…</td><td></td></tr>
<tr><td>141</td><td>Paul</td><td colspan="2">Y si eso pasa, ya D no cumple la propiedad de pertenecer al otro semiplano.</td></tr>
<tr><td>142</td><td>Caro</td><td colspan="2">D pertenecería a r.</td></tr>
<tr><td>143</td><td>Paul</td><td colspan="2">Ujum. Listo.</td></tr>
<tr><td>144</td><td>Caro</td><td colspan="2">Buen punto. Es por eso que no puede ser ni cometa ni rombo.</td></tr>
<tr><td>145</td><td>Inv</td><td colspan="2">¿Por qué rombo no?</td></tr>
<tr><td>146</td><td>Paul</td><td colspan="2">Porque para que sea rombo debe tener todos los lados iguales, ¿cierto?</td></tr>
</table>

147	Caro	Congruentes…		
148	Paul	Congruentes. Entonces, eh…		
149	Caro	Pasa exactamente lo mismo, la única forma para que AB y BC sean congruentes es que B pertenezca…		
150	Paul	A la circunferencia…		
151	Caro	No, B pertenece a la circunferencia.		
152	Paul	Digo, no. Para que se diera el rombo, eh, todos los segmentos tendrían que tener longitud BC, pero si eso pasa, para que eso pasara, D tendría que estar en la circunferencia y eso no… ya nos quita la condición que tenemos de que pertenezca al semiplano determinado por la recta r donde está A.		
153	Caro	Ujum.		

Para Caro la perpendicularidad de las rectas r y AC no permite obtener una cometa, aunque no es claro el motivo de ello, por lo cual Paul arrastra los vértices del cuadrilátero buscando alguna explicación [Exploración]. Las acciones de Paul llevan a ambos estudiantes a descubrir que la única forma de que se determine una cometa es que el punto B pertenezca a la recta r, que a su vez es mediatriz del segmento AC [137]. Pero esto no es posible, de acuerdo a Paul, en cuanto esto conllevaría a que el punto D perteneciera a la recta r y de esa forma no se cumpliría la condición de que el punto D esté en uno de los semiplanos [141]. Bajo esta idea, Caro asegura que el cuadrilátero no puede ser entonces rombo ni cometa [144].

154	Paul	Entonces solo se puede pues trapezoides, cualquiera, y paralelogramos. El paralelogramo es porque, se cumple cuando P se vuelve punto medio del segmento DB, pues por lo que ya habíamos dicho. Como…		
155	Caro	Pero solamente se forman los paralelogramos que tienen, eh, o sea, es el paralelogramo… cualquier paralelogramo que no sea cuadrado, que no sea cuadrado. Que no sea rombo. O sea, se puede formar rectángulo y pues digamos otro paralelogramo que no sea rombo, porque el rombo no se puede construir, pues bajo esas condiciones.	S	29:06
156	Paul	Ujum. ¿Pero el rectángulo por qué sale? [arrastra los puntos configurando un rectángulo] Uh, sí. Casi. Ah, pero, no saldría, el rectángulo sale porque, eh, en este caso es un rectángulo que no fuera cuadrado, entonces, si no es cuadrado, la longitud del lado BC y del lado DC tienen que ser diferentes. Y al ser ya diferentes, o sea, para que se formara el rectángulo, la condición que debe tener es que el segmento DC sea, tenga mayor longitud que el segmento BC. Para que se forme el rectángulo, pues ya teniendo la condición de que P fuera el punto medio del segmento DB. 	A	29:58
157	Caro	Ujum.		
158	Paul	Es por eso.		

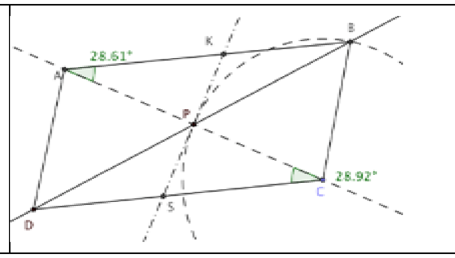
El trabajo realizado hasta ahora lleva a Paul y Caro a reconocer [Síntesis] que solo se pueden obtener trapezoides y paralelogramos, en tanto estos no sean rombos. El otro tipo de cuadrilátero que se puede obtener es un rectángulo y Paul se cuestiona sobre los motivos que llevan a obtener este tipo de cuadrilátero, volviéndolo a representar en pantalla. Desafortunadamente los argumentos que brinda [156] no son convincentes, aunque para Caro pareciera que estos son suficientes [157].

<table>
<tr><td>159</td><td>Caro</td><td colspan="2">Bueno, ¿se puede formar un trapecio isósceles?</td><td>P</td><td>31:23</td></tr>
<tr><td>160</td><td>Paul</td><td colspan="2">Um [inicia a arrastrar los puntos] no sé. Um, para que sean paralelas…</td><td rowspan="6">I</td><td rowspan="6">31:30</td></tr>
<tr><td>160</td><td>Caro</td><td colspan="2">Tendría que [recta] AD ser paralela a [recta] BC, ¿cierto? pero esto… [Arrastra el punto C y lo aleja de P] pero creo que esto no se puede, ¿o sí? [arrastra a D tratando de configurar un trapecio isósceles] ¿No se puede construir un trapecio isósceles?</td></tr>
<tr><td>161</td><td>Paul</td><td colspan="2">Um.</td></tr>
<tr><td>162</td><td>Caro</td><td colspan="2">Debería, tiene que tener dos lados paralelos y los otros tienen que ser congruentes, ¿cierto?</td></tr>
<tr><td>163</td><td>Paul</td><td colspan="2">Sí.</td></tr>
<tr><td>164</td><td>Caro</td><td colspan="2">Pero no [Intenta arrastrar los puntos tratando de configurar un trapecio isósceles sin éxito].</td></tr>
<tr><td>165</td><td>Paul</td><td colspan="2">¿Y un trapecio normal? que no fuera isósceles.</td><td>P</td><td>32:56</td></tr>
<tr><td>166</td><td>Caro</td><td>Creo que sí, ese sí se puede. Tendría que ser dos lados paralelos, ¿cierto?
[arrastra los puntos buscando una configuración que se ajuste a sus requerimientos] ¿Será que son paralelas? Tómale los ángulos internos para ver, para saber si son paralelas, la recta AB y DC. Bórrale ese ángulo [que anteriormente se habían marcado].
Es BAC [ángulo que se debe medir. Paul determina su medida] y ahora toma, borra ese [DCB] y toma ACD [Paul realiza esto y se obtiene algo como lo mostrado abajo].
Ahora muévelos para que coincidan y así poder tener las dos paralelas.</td><td>
</td><td rowspan="3">I</td><td rowspan="3">33:09</td></tr>
<tr><td>167</td><td>Inv</td><td colspan="2">¿Por qué hacen eso?</td></tr>
<tr><td>168</td><td>Caro</td><td>Pues para, tener los ángulos internos, alternos internos y poder, o sea, cuando tengamos esos dos ángulos iguales, podemos decir que AB y DC son paralelas. Por el teorema… [Paul arrastra los puntos tratando de lograr este objetivo hasta llegar a una configuración como la presentada abajo] Ahí. Podríamos decir que AB y DC son relativamente paralelas… entonces, tú me decías que ¿qué?</td><td>
</td></tr>
</table>

169	Paul	Pero mira qué pasa, sin son paralelas, se vuelve a tener… [con el mouse recorre el lado AD]		
170	Caro	Ujum.		

Caro ahora quiere evaluar la posibilidad de que el cuadrilátero ABCD sea un trapecio isósceles [Planeación]. Paul arrastra algunos puntos buscando lados paralelos [Implementación], pero las acciones que realizan llevan a Caro a sospechar que esto no será posible, por lo que ahora Paul propone configurar un trapecio que no sea isósceles [Planeación]. Para Caro es muy posible que ese cuadrilátero sí pueda obtenerse e inicia a arrastrar los puntos [Implementación] buscando una configuración que permita asegurar que el cuadrilátero es trapecio [166]. Una vez tienen un cuadrilátero que parece ser trapecio, proceden a determinar las medidas de una pareja de ángulos alternos internos y como sus medidas no son iguales, proceden a arrastrar los puntos con el fin de lograr esta igualdad, asegurando que con ello los lados serán paralelos, apoyados en un hecho geométrico conocido por ellos. Paul realiza estas acciones y logra una configuración en que los ángulos alternos internos son congruentes, pero advierte a Caro de que el lograr que un par de lados sean paralelos tiene otras implicaciones [169].

171	Inv	¿Qué pasa?	I	
172	Paul	Que, si hacemos coincidir estas dos paralelas, volvemos a tener el paralelogramo, o sea no tendríamos trapecio isósceles, que es lo que queríamos obtener.		
173	Caro	O un trapecio normal.		
174	Paul	¿Y eso por qué pasa?		
175	Caro	Porque si movemos D, creo que si movemos D… [arrastra el punto D y lo aleja de P]		
176	Paul	O sea, si alguna de las dos son paralelas, inmediatamente las otras también se vuelven paralelas [Caro asiente con la cabeza].		
177	Caro	Pero, ¿por qué pasa eso?	A	37:04
178	Inv	¿Qué piensan?		
179	Caro	Estamos mirando por qué… al tratar de que dos sean paralelas, las otras inmediatamente se vuelven paralelas.		
180	Paul	¿Cuáles son las perpendiculares?		
181	Caro	¿Estas dos? [r y recta AC] esta es tangente [señala la recta r].		
182	Paul	Ah, pero mira, estos dos triángulos con congruentes.		
183	Inv	¿Cuáles?		
184	Paul	El triángulo AP…		

185	Caro	APD.		
186	Paul	No, este [determina el punto de intersección entre r y el segmento AB y lo llama K] pongámosle K y este también… [determina el punto de intersección entre r y el segmento CD y lo llama S] 		

Paul manifiesta que hacer que en el cuadrilátero dos lados sean paralelos conlleva a que el cuadrilátero sea paralelogramo y en consecuencia obtener un trapecio no sería posible [172]. Para Paul esto es algo llamativo, pues como él lo señala, en la configuración que se tiene en pantalla, si en el cuadrilátero dos lados son paralelos, automáticamente los otros dos también lo son. Esto lleva a Caro y Paul a cuestionarse por los motivos que llevan a tal resultado [Análisis]. En un primer momento los estudiantes retoman algunas condiciones que el problema provee como lo son la perpendicularidad de la recta r y AC, así mismo, determinan algunos puntos de intersección que posiblemente puedan ser de utilidad.

187	Caro	¿Por qué son congruentes?		
188	Paul	Mira, el triángulo APK y el triángulo…		
189	Caro	SPC…		
190	Paul	Son congruentes. Porque para ser paralelas, pues por el teorema, el ángulo KAP es congruente con el ángulo PCS y como estas dos son perpendiculares [rectas r y AC], el ángulo SPC y el ángulo APK son de 90.		
191	Caro	No… ¿segura?		
192	Paul	Sí, claro. Porque estas dos [rectas] son perpendiculares ¿cierto?	A	
193	Caro	Sí.		
194	Paul	Tenemos dos lados, digo, dos ángulos congruentes y el segmento PC y el segmento AP son congruentes porque este [P] es el punto medio. Tendríamos ángulo-lado-ángulo, ¿eso existe?, ah no! el de cateto hipotenusa.		
195	Caro	Ujum.		
196	Paul	Sí, ¿ese sí? ¿O no? um.		
197	Caro	No, porque tú tienes dos ángulos.		

Paul ahora intenta proveer una justificación al hecho de que los triángulos AKP y PSC son congruentes. En su discurso involucra la congruencia de una pareja de ángulos alternos internos, derivada de la relación de paralelismo de dos lados del cuadrilátero [190]. Igualmente, involucra la congruencia de otros dos ángulos gracias a que estos están determinados por rectas perpendiculares [190]. Finalmente, asegura la congruencia de dos segmentos [194] y con base en esto afirma que los triángulos APK y PCS son congruentes. Sin embargo, él duda del soporte de su argumento y gracias a ello, y a la desconfianza de Caro, quien tampoco tiene seguridad del hecho geométrico involucrado por Paul, Paul opta por tomar, desafortunadamente, otro camino para justificar su idea.

198	Paul	Eso sí. Tengo dos ángulos… Ah, pues ven y miramos la longitud [determina las distancias KP y PS y son diferentes]. Hagámoslo coincidir de que esto sea [intenta que las medidas sean iguales], que tengan la misma… sí, mira, esos triángulos son congruentes.		
199	Caro	Cuando se hacen coincidir… [las distancias KP y PS]		
200	Paul	Sí.		
201	Inv	¿Qué es lo que quieren probar?		
202	Paul	Que no se puede obtener un trapecio.		
203	Inv	Ok.	A	
204	Paul	Sí, ¿cierto?		
205	Caro	Sí, un trapecio cualquiera. O bueno, un isósceles no se puede…		
206	Paul	Sí porque, queremos probar que al ser dos segmentos son paralelos, inmediatamente los otros dos se vuelven paralelos.		
207	Caro	Pues entonces digamos, tendríamos esos dos ángulos congruentes y los segmentos congruentes ¿cierto?		
208	Paul	Y estos también serían… ah, ok. Ya sé por qué.		

Paul, al desviarse de la ruta que venía desarrollando, involucró argumentos empíricos para soportar que los triángulos AKP y PSC eran congruentes. Luego de ello retoman su objetivo, que en palabras de Paul [206] es justificar que en el cuadrilátero ABCD si dos lados son paralelos, los otros dos también lo son. Caro enuncia algunos resultados que ya han justificado en la representación gráfica y de repente Paul manifiesta conocer cómo proveer una justificación a su conjetura [208].

209	Caro	¿Por qué?		
210	Paul	Um, si miramos el triángulo APD y el triángulo BPC, también serían congruentes. Porque tenemos los ángulos que son opuestos por el vértice, y pues como P es el punto medio, tenemos el segmento AP y el segmento PC congruentes, ¿cierto? tenemos ángulo-lado.		
211	Caro	Pero nos falta un lado.	A	
212	Paul	Y toca justificar porque el otro también se vuelve congruente… el ángulo PDC es congruente con el ángulo KBP por el mismo teorema, porque como son paralelas… y son alternos internos… son congruentes.		
213	Caro	¿Cuáles son paralelas?		
214	Paul	Eh, suponiendo que la recta…		

215	Caro	¡Ah sí! Esos dos ángulos son congruentes. Sí.		
216	Paul	Y ya diciendo que como teníamos estos congruentes [triángulo APK y PSC], este segmento [PS] entonces sería congruente con este [PK]. ¿Cierto? el segmento PS es congruente con el segmento PK… tenemos el ángulo, el lado… no…		

Una vez Caro cuestiona a Paul por la forma de justificar la conjetura, él menciona que los triángulos APD y BPC son congruentes e intenta proveer una justificación para ello. Desafortunadamente Paul no logra establecer una ruta de justificación totalmente clara y se confunde en su discurso.

217	Caro	No, otra vez.	V	42:21
218	Paul	Ya habíamos dicho que el triángulo APK es congruente con el triángulo CPS. Entonces ya tendríamos que, por definición, el segmento…		
219	Caro	KP es congruente con PS. Sí.		
220	Paul	Entonces por el teorema de ángulos alternos internos, tenemos que el ángulo KBP es congruente con el ángulo PDS.		
221	Caro	Sí, tendríamos… pero tendríamos el lado, tendríamos este ángulo y este ángulo.		
222	Inv	¿Cuál ángulo?		
223	Caro	El ángulo KPB es congruente con el ángulo DPS por ser opuestos por el vértice.		
224	Paul	Pero también tenemos el ángulo DSP congruente con el ángulo PKB, ¿sabes por qué? porque como estos dos triángulos son congruentes [SPC y AKP], el ángulo…	A	43:15
225	Caro	Ah, entonces ahí por par lineal, entonces esos dos ángulos también serían congruentes y por ángulo-lado-ángulo, esos dos triángulos serian también congruentes.		
226	Inv	¿Quiénes son congruentes entonces?		
227	Caro	KPB…		
228	Paul	KPB es congruente con SPD, son congruentes. Y al ser congruentes, el segmento DP es congruente con el segmento PB. Como son congruentes y ya tenemos…		

El razonamiento de Paul no es claro y lleva a que Caro le pida que lo exprese nuevamente [Verificación]. Cuando Paul realiza esto, retoma algunas ideas que previamente había declarado e involucra otras que le permiten tener mayor claridad sobre su razonamiento. En este punto Caro apoya algunos momentos del razonamiento que les permiten justificar que los segmentos PD y PB son congruentes [228].

229	Caro	O sea, serían congruentes, significa que P sería punto medio del segmento BD y pues como… P si obligatoriamente es punto medio…		
230	Paul	Del segmento AC…		
231	Caro	Entonces siempre, esas diagonales de ese cuadrilátero que se forma se van a bisecar, cuando esos dos ángulos son congruentes [BAP y PCD], entonces		

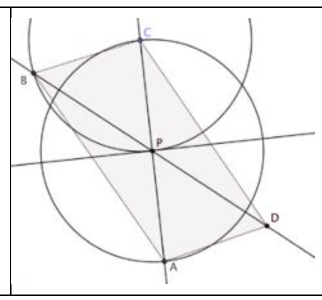
		siempre… cuando tratamos de que esas dos rectas [AB y DC] sean paralelas, inmediatamente las otras dos rectas van a ser paralelas. Por eso no se puede formar un trapecio. Es por eso.		
232	Paul	Sí, solo se pueden formar…	S	44:42
233	Caro	Paralelogramos que no sean rombos.		
234	Paul	Y cualquier tipo de trapezoide… No se puede formar ni cuadrado, ni rombo, ni trapecios, ni cometas.		45:04

Para finalizar, Caro trae a colación dos hechos con los que se cuentan ya, P es punto medio del segmento AC y P es punto medio del segmento BD. Con base en esto, ella asegura que, al tener un par de lados paralelos, el otro par de lados también lo será y en consecuencia no se puede determinar un rombo. Ambos estudiantes terminan su trabajo mencionando que el cuadrilátero ABCD solo puede ser trapezoide y paralelogramo, pero nunca rombo, cuadrado, trapecio o cometa [Síntesis].

El trabajo de Ana y Juan

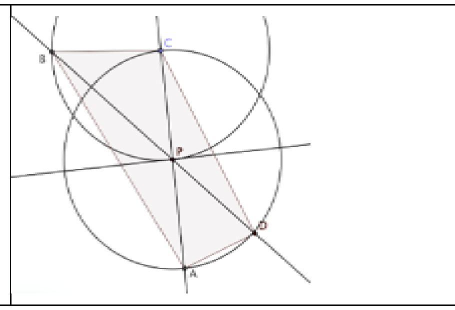
Este grupo inicia su trabajo leyendo [Lectura] el enunciado del problema, pero al ver la extensión del mismo, opta por ir representando gráficamente en Geogebra cada condición.

1	Juan	[Lee el enunciado] Dibuje un punto P y una recta r que lo contiene. Construya la recta perpendicular por el punto P a la recta r. Dibuje un punto C en esta nueva recta… vamos haciendo esas dos cosas	L	00:10
			P	00:23
2	Ana	Ujum. Un punto P y una recta, ¿sí? [Abre Geogebra y construye la recta AB]. ¿Lo nombramos? [nombrar el punto como P] ¿Sí?	I	00:28
3	Juan	No, déjalo ahí [lee el enunciado del problema], la perpendicular por el punto P.	L	00:52
4	Ana	[Abre Geogebra y construye la perpendicular a la recta AB por el punto A] Listo.		
5	Juan	[Lee] Dibuje un punto C en esta nueva recta, distinto al punto P. Construya un punto A de tal forma que P… punto medio del segmento AC. Listo.		
6	Ana	Este es P, ¿cierto? [señalando el punto A. Construye un nuevo punto en la recta AB]		
7	Juan	No, pero en la nueva recta. Bueno, igual ni importa porque… [Ana construye un punto en la recta perpendicular a la recta AB, llamado C, y borra el construido anteriormente]		
8	Ana	Y la misma distancia [construye la circunferencia con centro en A y radio AC y nombra la segunda intersección de la circunferencia con la recta CA como D]. Listo.		
9	Juan	[Ana regresa al problema] Ahora sí cambiemos el nombre a… Ese es P [refiriéndose al punto A, Ana lo renombre como P], y aquí es A [señalando el punto D, Ana lo renombre como A]. Listo [regresan al enunciado]. [Lee] En el semiplano determinado por la recta r, que contiene al punto A, dibuje un punto D.		

10	Ana	¿Quién era r? este es r [señala el punto B] y este es D [señala el punto C] ¿sí?		
11	Juan	Esta es la recta r [señala la recta PB].		
12	Ana	Ujum. Que contiene a A, ¿un punto cualquiera? sí, ¿cierto?		
13	Juan	Sí.		
14	Ana	¿Dónde?		
15	Juan	Cualquier lado [Ana dibuja un punto llamado D]. Ese es D.		
16	Ana	Listo [regresa al problema].		
17	Juan	[Lee] Construya la recta PD [Ana construye dicha recta en Geogebra]. Bueno, ahora si es bueno marcar esta recta con el... nombrar… [Ana nombra la recta BP como r] Listo [regresan al problema].		
18	Ana	[Lee] Construya la circunferencia con centro C y radio CP [va a Geogebra]. ¿CP? espera [regresa al problema y verifica].		
19	Juan	Con centro en C y radio CP, sí [Ana construye esta circunferencia]. [Lee] Construya en cuadrilátero ABCD.		
20	Ana	No…		
21	Juan	Ah, no mentiras. [Lee] Sea B el segundo punto de intersección de la recta PD y la circunferencia construida con centro en C.		
22	Ana	¿Acá? [señala con el mouse el lugar donde iría el punto B]		
23	Juan	Sí [Ana dibuja este punto y lo nombra B].		
24	Ana	Ahora sí…		
25	Juan	Ahora sí cuadrilátero ABCD [Ana construye este cuadrilátero]. [Lee] Elabore conjeturas sobre los tipos de cuadriláteros que pueden determinarse, describiendo las formas en que se obtienen dichos cuadriláteros. Justifique estas conjeturas. ¿Qué propiedad debe cumplir el punto D para que el cuadrilátero ABCD sea paralelogramo? [regresan a Geogebra] 		

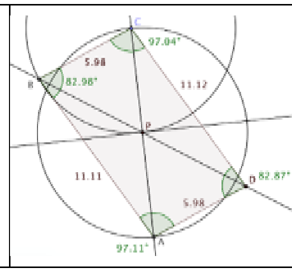
Cada indicación que es leída se representa gráficamente en Geogebra, con el ánimo de no perder información. Al final de realizar esto, nombran los puntos de acuerdo al enunciado del problema.

26	Inv	¿Qué piensan?		
27	Juan	No sé si entendí bien el… lo que preguntan. No sé si se refiere a que con estos mismos pasos hacer una conjetura con esos cuadriláteros, exactamente con esos mismos pasos. ¿Tú qué entiendes ahí?	C	06:02
28	Ana	Espera [lee el problema mentalmente].	L	06:34
29	Juan	[Lee] Los tipos de cuadriláteros que pueden determinarse, descubriendo las formas en que se obtienen dichos cuadriláteros.		
30	Ana	Sí, luego pensamos en… es que estas parecen ser paralelas [señala los lados CD y	V	06:53

		AB]. Espera [con la herramienta Relación evalúa si hay o no una relación entre estos segmentos, la herramienta no arroja alguna relación]. Ah no.		
31	Juan	Yo creo que cuando D está en la circunferencia, de centro P… ahí se vuelve paralelogramo.	A	07:27
32	Ana	[Arrastra el punto D a dicha circunferencia] No [regresa el punto D a su posición original]. 		

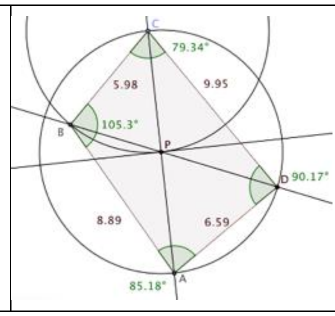
El grupo no tiene claridad sobre cómo afrontar el problema al inicio [27] dado el proceso de construcción que se tuvo que realizar y por ello se cuestionan por lo que el problema les pregunta [Comprensión]. Esto los lleva a revisar el enunciado del problema [Lectura] y en particular el apartado que da la instrucción sobre lo que se solicita [29]. Ambos miembros inician a analizar [Análisis] la situación representada y anticipan algunos resultados o condiciones que deberían satisfacerse para que el cuadrilátero sea paralelogramo. Particularmente, Ana [30] contempla la posibilidad de que un par de lados del cuadrilátero construido sean paralelos, pero al utilizar una herramienta de Geogebra para verificar [Verificación] esto, se percata que esta relación no es verdadera. Por su parte, Juan ve una posibilidad [31] respecto a la ubicación del punto D para que el cuadrilátero ABCD sea paralelogramo, pero al corroborar su hipótesis [32], se da cuenta que esta no es verdadera.

33	Inv	¿Qué piensa Ana?		
34	Ana	No sé, tal vez, es que el punto D, si con los ángulos, tenga [el ángulo D] el mismo [medida de] ángulo que B. No estoy segura.		
35	Juan	Sí, si tienen los mismos ángulos opuestos, pues por, sería paralelogramo por…		
36	Ana	¿Miramos los ángulos?	P	08:27
37	Juan	Pero, dice que D, solo D. Cambiando D se vuelve paralelogramo [miran la pantalla, después de un rato Juan regresa al problema]. No entiendo bien es, lo que dice acá. [Lee] Los tipos de cuadriláteros que pueden determinarse, describiendo las formas en que se obtienen dichos cuadriláteros.	C L	08:32 09:32
38	Inv	¿Qué pasa Juan?		
39	Juan	Es que no entiendo lo que pide hacer en esa parte. Me imagino que para que se puedan construir diferentes cuadriláteros, lo único que se puede hacer es modificar D. D puede estar en cualquier parte del semiplano, que esté en el mismo lado de A con respecto a r.	C	11:00

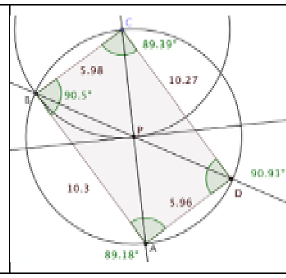
		Entonces de esa manera se pueden construir diferentes cuadriláteros si eso es a lo que se refiere. Y ahí sí encontrar una posición en D de tal manera que se vuelva paralelogramo. Porque pues, para que, creo que es el único que se puede modificar por que el resto sí tienen condiciones [Ana asiente con la cabeza], por ejemplo, P es punto medio del segmento AC, entonces no se puede modificar. Yo me imagino que es eso.		
40	Ana	¿Y si empezamos a mover? ¿Sí? Empezar a mover D. Pero, ¿qué ponemos? ponemos los ángulos y los lados…	P	11:32
41	Juan	Listo [Ana determina las longitudes de los lados del cuadrilátero y de sus ángulos].	E	11:43
42	Ana	A ver… [inicia a arrastrar al punto D] ¿Hagamos primero para que los [ángulos] opuestos sean congruentes?		
43	Juan	Sí, ya siendo…		
44	Ana	¿Sí? mira a ver		
45	Juan	[Ana arrastra a D y las medidas de los ángulos D y B se aproximan] Por ahí estaba cerca [Ana aproxima ambas medidas a 83]. Es que se puede decir cómo, primero ubicamos D y luego sí trazamos la recta [DP] y luego encontramos la intersección ¿cierto? 		

Ana nuevamente anticipa otra posible configuración [34] en la que intervienen los ángulos D y B, sin verificarla, Juan muestra aceptación en cuanto para él esto permitiría obtener un paralelogramo. Lo anterior motiva a Ana a proponer que se analice esta posibilidad [Planeación]; sin embargo, antes de implementarla, Juan cuestiona la pertinencia de realizar esto, aludiendo al enunciado del problema y lo que este solicita [Comprensión]. Esto lo lleva a él a retomar el enunciado del problema y leerlo [Lectura], haciendo énfasis en que se solicitan distintos tipos de cuadriláteros que puedan ser representados a partir del cuadrilátero en pantalla únicamente modificando la posición del punto D [39]. Juan expresa algunas condiciones del problema en palabras propias [Comprensión] con el fin de comprender lo que este solicita.

Como respuesta, Ana le propone [Planeación] que inicien a arrastrar el punto D con el fin de observar relaciones, tomando las medidas de los lados y ángulos del cuadrilátero ABCD [40]. Esta idea es aceptada por Juan y de esa forma Ana procede a realizar este ejercicio de búsqueda de información [Exploración]. En este proceso se propone como meta que los ángulos opuestos del cuadrilátero sean congruentes [42] y manipulan los vértices de dicho cuadrilátero hasta lograr una representación acorde a sus intereses [45].

46	Ana	Ujum. Miremos las diagonales. Parecen ser congruentes [los segmentos PB y PD] ¿no?	P	13:41
47	Juan	Sí, puede ser que, o sea que P…		
48	Ana	Sí, que sea punto medio también de [segmento] BD.		
49	Inv	¿Puede pasar qué?		
50	Ana	Que P sea punto medio, pero…		
51	Juan	Que P sea también punto medio del segmento BD [Ana determina las longitudes de las diagonales, estas no son iguales].	I	14:13
52	Ana	Espérate y borramos esta [oculta las circunferencias en pantalla]		
53	Juan	Es que para que sea un paralelogramo pareciera que… Nosotros ya sabemos que, tenemos la distancia CP, entonces esta misma distancia ubicamos el punto D ¿sí? [Señala al punto D], me refiero a PD que sea igual a PC. Entonces… ah, porque D puede estar acá [señala otra posición en pantalla y muestra las circunferencias que estaban ocultas]. Es que quiero, si D estuviera acá, a la misma distancia [señala un punto sobre la circunferencia con centro P y radio PA] ¿Me ayudas a arrastrar el punto…?	P	16:09
54	Ana	¿Acá? [arrastra el punto D a una nueva posición]	I	16:14
55	Juan	Ahí, tenlo… 		
56	Ana	¿Que ambos estén en la misma? [logra ubicar a D y B en la circunferencia con centro P]		
57	Juan	No, no no. Es que es con respecto a D, pero. O sea, nosotros no, no sabemos nada de, tenemos que modificar D para que se convierta en paralelogramo. Tenlo ahí un momento [Ana regresa a la anterior configuración]. Entonces…		
58	Inv	¿Qué quiere Juan?		
59	Juan	Es que pensé que tener la misma distancia de CP en PD, pero, pero como, si se mueve D, B también se va a mover pero a través de la circunferencia con centro en C. Pensé que de pronto calcando esa misma distancia sí iba a obtener el paralelogramo.		

La representación con la que cuentan en pantalla lleva a Ana a proponer [Planeación] que determinen la relación entre las diagonales del cuadrilátero, pues pareciera que los segmentos PB y PD son congruentes [46]. Al determinar estos valores [Implementación], Ana tiene en cuanta las diagonales, cuyas longitudes no son iguales, y no los segmentos PB y PD sobre los que habían vislumbrado una propiedad. Ahora Juan le pide a Ana [Planeación] que ubique al punto D sobre la circunferencia con centro P, pues considera que en ese caso podría obtenerse un paralelogramo. Ana realiza esto [Implementación] pero el resultado no es afortunado [55], motivo que lleva a Ana a seguir arrastrando a D sobre la circunferencia hasta que este punto y B estén sobre la circunferencia [56]. Esta última intervención no es aceptada por Juan, quien cuestiona que solamente debe modificarse el punto D, Ana opta por retomar la configuración anterior [57]. Para Juan el que el punto D estuviera en la circunferencia de centro P parecía ser la condición del punto, pero desafortunadamente el trabajo realizado le muestra que no es así.

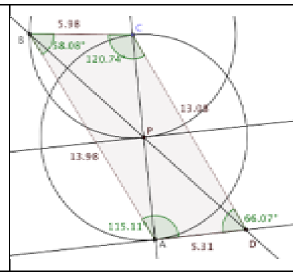
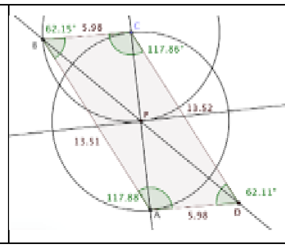
60	Ana	[Arrastra a D de tal forma que se obtiene algo como lo de abajo] Pero mira que estando con el mismo radio [PB es igual a PD], mira los ángulos [le señala las medidas de los ángulos del cuadrilátero], se acercan a 90 y los lados…		E	17:06
61	Juan	Se vuelve un rectángulo, porque, pues sí sería un paralelogramo, pero bajo qué condiciones D, ¿para qué B esté en la intersección?			
62	Ana	Serían dos, que [el punto D] esté en la circunferencia y tenga ángulo de 90.			
63	Juan	Um, sí.			
64	Ana	Es la que me suena a mí, no sé…			
65	Juan	Sí, sí. Es que si D está fuera de la circunferencia, ahí… [arrastra al punto D a otros posiciones del semiplano]			
66	Ana	Um, [observa otras posiciones de D en el semiplano en las que el cuadrilátero parece ser paralelogramo].			
67	Juan	Pareciera que no.			
68	Inv	¿No qué?			
69	Juan	O sea, que la única, lo que dice Ana, que la condición es que [D] esté dentro de la circunferencia de centro P, tiene que estar en esa circunferencia [arrastra el punto D hasta una posición en la que el cuadrilátero es paralelogramo y este no está en la circunferencia].			
70	Ana	Um, sí.			

Ana retoma [Exploración] la configuración en la que los vértices del cuadrilátero están sobre la circunferencia de centro P [60], indicándole a Juan que en ese caso el cuadrilátero ABCD tiene propiedades especiales, que lo convertirían en rectángulo, en términos de Juan [61]. Esta configuración lleva a Ana a proponer que el cuadrilátero ABCD es rectángulo cuando D pertenece a la circunferencia de centro P y el ángulo D es recto [62]. Juan arrastra el punto D por otros lugares del semiplano en los que el punto no pertenece a la circunferencia y encuentra algunas posiciones en las que se determina un paralelogramo, asunto que lo lleva a asegurar que las condiciones expuestas por Ana no son necesarias [69]. Sin embargo, Juan no se percata de que las condiciones expuestas por Ana son aquellas que permiten asegurar que el cuadrilátero sea un rectángulo y no un paralelogramo.

71	Inv	¿Qué viste ahí?	E	
72	Ana	Lo mismo, mira [señala con el mouse los ángulos del cuadrilátero]. Ángulos opuestos congruentes. Los lados también.		
73	Inv	¿Qué pasa Juan?		
74	Juan	Entonces no sirve, no es necesario que D esté dentro de la circunferencia. Pues que D…		
75	Ana	Pues que P sea punto medio de BD. Tomemos esta… [longitudes de los segmentos PB y PD]	P	20:32
76	Juan	Sí, miremos… [Ana determina las longitudes de los segmentos PB y PD, estas son iguales]	I	20:43
77	Ana	Sí.		
78	Juan	Bueno, lo que no entiendo es que los pasos indican que, primero tengo que ubicar D y después sí sale B ¿sí me hago entender? o sea, si primero ubico D, ¿con qué condiciones lo ubico para que P sea punto medio de B y D?, si no se ha construido B. ¿sí? ¿Me hago entender? [regresa al problema] Primero ubicamos D [lee partes del enunciado del problema]	C L	20:59 21:26

Apoyados en la representación en pantalla donde D no está en la circunferencia de centro P y el cuadrilátero ABCD es paralelogramo, Juan refuerza su idea de que no se requiere que el punto D esté en la circunferencia, ante lo cual Ana propone que la condición para obtener este tipo de cuadrilátero es que P sea punto medio del segmento BD [75], lo que la lleva a proponer que se verifique en ese cuadrilátero en pantalla si dicha propiedad se satisface [Planeación]. Con la aceptación de Juan, Ana realiza esto [Implementación] y efectivamente las longitudes de los segmentos llevan a Ana a corroborar su hipótesis. Sin embargo, Juan no tiene mucha seguridad en que esa sea la propiedad [Comprensión], pues para él, de acuerdo a la forma en que el problema se enunció, B aparece después del punto D y de esa forma no sería coherente la propiedad enunciada por Ana en cuanto D debe ser construido ya con alguna propiedad que garantice que el cuadrilátero ABCD sea paralelogramo [78]. Juan retoma el enunciado del problema [Lectura] y lee algunos apartados del mismo sin mencionar palabra alguna, posiblemente para tener seguridad de sus ideas.

79	Ana	Este lado [segmento CP] va a medir lo mismo que este [segmento CB. Con el mouse los señala].	A	21:50
80	Juan	¿Qué pasa si esta? ¿Si AD es paralelo a r?	P	22:13

81	Ana	¿Paralelo a esta [recta r]?		
82	Juan	Sí [Ana traza la recta paralela a r por A]. Que pase por A. Ubicamos D luego, ahí [sobre esta recta paralela]. Ya no ¿cierto? [el cuadrilátero ya no es paralelogramo] 	I	22:26
83	Ana	¿Borro?		
84	Juan	Sí [Ana retorna a la configuración previa y ambos observan la pantalla]. 	A	22:53
85	Ana	Es solo que estos sean congruentes, BP y PD. Pero es que es solo con D [las condiciones deben hacer referencia solamente a D].		

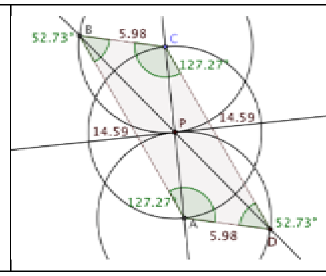
Ana enuncia algunas relaciones que pueden ser extraídas de la construcción hecha [Análisis] con el objetivo de reconocer propiedades que permitan garantizar que el cuadrilátero es paralelogramo. Juan no da desarrollo a esta idea y propone [Planeación] considerar una configuración donde uno de los lados del cuadrilátero, segmento AD, es paralelo a la recta r. Ana construye una recta paralela a la recta r por el punto A [Implementación] y ubica al punto D sobre esta recta posteriormente, sin embargo el cuadrilátero pierde la propiedad de ser paralelogramo [82], resultado que los lleva a descartar esta posibilidad y retomar la configuración previa, donde el cuadrilátero ABCD es paralelogramo, y a que Ana vuelva a contemplar que la condición necesaria es que el punto P sea punto medio del segmento DB [Análisis], reconociendo que no es muy convincente esta condición en cuanto toda propiedad debe ser expresada en función del punto D [85].

86	Juan	Es que nosotros construimos primero la intersección que es P para que sean perpendiculares, ubicamos C y A, de manera que P sea punto medio. Ubicamos C y luego A, después ubicamos D y luego B ¿no?… [Observa la pantalla por un tiempo en silencio] no [rechazo con la cabeza].		
87	Inv	¿No qué?		
88	Juan	Es que lo que nos confunde es el hecho de ubicar D, o sería primero ubicar B y ubicar D, de tal manera que sea congruente a B, ubicar D de tal manera que P sea punto medio del segmento BD.	C	25:28
89	Ana	¿Cómo así?		
90	Juan	Me refiero, ubicamos B en la circunferencia [de centro C] y luego D de tal manera que P sea punto medio del segmento BD. Pero los [lee el anunciado], siguiendo el	L	26:09

		orden de construcción, B es lo último que se construye.		
91	Inv	Ana, ¿qué piensas?		
92	Ana	Lo único, que P sea punto medio de BD. Pero…		
93	Juan	No, no se me ocurre cómo. ¿De qué otra manera…? bajo qué condiciones D se debe ubicar de tal manera que se vuelva paralelogramo, a parte de esa, que P sea punto medio. Creemos que con el radio CP [señala el segmento CP] no necesariamente sea, o sea, puede ser y también puede estar fuera de ese radio [han encontrado ejemplos donde el punto D está en la circunferencia de centro P y fuera de esta y se tiene un paralelogramo]… Aunque mira que también acá [con el mouse señala el segmento AD] también se tiene el radio [señala con el mouse el segmento BC y CP] CP. Pero no tiene que estar [D] en la circunferencia con centro P.	A	26:42
94	Inv	¿Qué fue lo último que dijo?		
95	Juan	Los radios…		
96	Ana	Son congruentes.		
97	Juan	Son los mismos [con el mouse recorre los segmentos CP y AD]. O sea, CP, BC y AD son iguales. ¿Para cualquier caso?	P	29:53

El estado de incertidumbre que embarga al grupo lleva a Juan a retomar los pasos de la construcción, donde hace énfasis en que primero aparece el punto D y luego el punto B [86], de acuerdo al enunciado del problema, y de acuerdo a lo que han encontrado en su exploración, parecería que primero debe construirse el punto B y luego D, de forma tal que P sea punto medio del segmento BD [Comprensión]. Juan revisa el enunciado del problema nuevamente [Lectura] y confirma que B es el último punto que debe construirse. Ana por su parte solo reconoce que la condición es que el punto P sea punto medio del segmento BD [Análisis], idea compartida por Juan quien además manifiesta que se tienen casos donde P puede estar tanto en la circunferencia de centro P como fuera de esta y que aun así el cuadrilátero es un paralelogramo [93]. Al final, Juan se percata [93] de que el segmento AD es congruente con el segmento CP y que esto se da sin que D pertenezca a la circunferencia de centro P, lo que lo lleva a considerar que los segmentos CP, BC y AD sean congruentes cuando el cuadrilátero es paralelogramo [Planeación].

98	Inv	¿Qué van a hacer?		
99	Ana	Voy a… [Arrastra el punto D y busca otra configuración del cuadrilátero donde este es paralelogramo] ahí dio, ¿no?		
100	Juan	Mira, acá también. Son parecidos [se refiere a las longitudes de los lados opuestos]. [Ana arrastra nuevamente a D y busca otra configuración] También [se cumple que los lados opuestos son congruentes]. Entonces, que D esté en la circunferencia de centro A y radio PC, o PA.	I	30:00
101	Ana	Sí.		

102	Juan	Y ahí sería siempre paralelogramo. Que D esté en esa circunferencia. Pues tracemos la circunferencia de centro A y radio… [Ana traza la circunferencia de centro A y radio AP]		
103	Ana	Listo.		
104	Juan	Y D que esté en esa circunferencia [Ana ancla el punto D a la nueva circunferencia gracias a la herramienta Anclar]. 	V	30:40
105	Ana	Movamos…		
106	Juan	Sí [Ana arrastra el punto D sobre la circunferencia de centro A. Ana asiente con la cabeza ante lo que se muestra en pantalla]. Y obviamente no puede ser colineal a la recta PA. No puede estar en esa… D no puede pertenecer a la recta perpendicular a r, porque si no, no sería… ponlo ahí [en la recta AC. Ana lo acerca a dicha recta pero el cuadrilátero desaparece y se convierte en segmento]. Siempre sería paralelogramo hasta que se vuelva recta. Esa sería…		
107	Ana	La conjetura…		

Ana arrastra el punto D buscando otra configuración en la que el cuadrilátero sea paralelogramo [Implementación] y cuando lo logra, ambos verifican que estos segmentos mantienen su relación de congruencia. Este ejercicio lo realizan nuevamente y obtienen un resultado similar, lo que lleva a Juan a establecer que el punto D debe cumplir la condición de pertenecer a la circunferencia de centro Ay radio PA, propiedad compartida por Ana [100 – 102]. Juan le pide a Ana que construya a circunferencia de centro A y radio AP [Verificación] y que ancle a D a esta nueva circunferencia, acciones realizadas por Ana. Luego de esto, proceden a mover el punto D sobre la circunferencia y observan que el cuadrilátero es en todo momento un paralelogramo. Con esta información parece que tienen insumos para proceder a formular la conjetura [107].

108	Juan	[regresa al problema y lee] Elabore conjeturas sobre los tipos de cuadriláteros que pueden determinarse, describiendo la forma en que se obtienen dichos cuadriláteros. Justifique esas conjeturas.	L	32:31
109	Ana	Acá [retoma un caso anterior explorado] habíamos visto con rectángulo, ¿no?		
110	Juan	Pues, hay un rectángulo cuando…		
111	Ana	Un ángulo es recto.	A	32:48
112	Juan	El ángulo es recto o está en esas intersecciones [entre las circunferencias con centros en A y P] ¿no?		
113	Ana	[Ana arrastra el punto D hacia una de esas intersecciones] Ujum.		

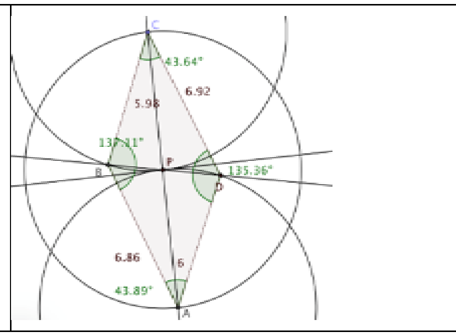
Habiendo descubierto esta propiedad para el punto D, Juan retoma el enunciado del problema [Lectura] y lee el apartado donde se solicita que se formulen conjeturas sobre los distintos tipos de cuadriláteros que pueden obtenerse [108]. Ana le recuerda el caso evaluado ya donde se obtenía un rectángulo [Análisis] al tiempo que arrastra al punto D hasta que en pantalla se obtiene dicha configuración. Ambos retoman la condición que Ana expresó en su momento pero Juan contempla también que otra condición del punto D para que el cuadrilátero sea rectángulo, la cual se apoya en la representación en pantalla, es que el punto D pertenezca a la intersección de las circunferencias de centros A y P [112]; esta propiedad es verificada y aceptada por Ana a través del arrastre. De esta forma ya cuentan con condiciones para obtener dos tipos de cuadriláteros.

114	Juan	Em, ¿será que acá hay trapecios? sí [Ana arrastra a D pero este solo se mueve a lo largo de la circunferencia con centro A]. Lo que pasa es que antes de… o sea D puede estar en cualquier parte del, pero para que sea paralelogramo siempre tiene que estar en la circunferencia [Ana desvincula a D de la circunferencia con centro A].	E	33:33
115	Ana	Ya [inicia a arrastrar el punto D].		
116	Inv	¿Qué van a hacer ahí?		
117	Juan	Es que como lo que quieren que hagamos es que construyan conjeturas acerca los cuadriláteros que se construyen, entonces pues pensamos, pues queremos ver si de pronto se puede construir, a parte del rectángulo, del paralelogramo, un trapecio, otro tipo de cuadrilátero…		
118	Ana	¿Así? ¿Miramos a ver? [Arrastró a D hasta una posición en la que pareciera que el cuadrilátero es trapecio. Con la herramienta Relación comprueba si los lados aparentemente paralelos los son, el resultado no es afortunado] No, no son paralelas. Construyamos una paralela [recorre con el mouse el segmento BA].	P	35:27
119	Juan	Que pase por C [Ana construye la paralela al segmento AB por el punto C y trata de anclar al punto D a esta nueva recta sin éxito, Geogebra no le permite hacer esto, entonces procede a arrastrarlo hasta que visualmente esté sobre la recta paralela]. No, pero ponla acá en la paralela [insiste en ubicar a D en esta recta].	I	35:34
120	Ana	Espérate [nuevamente intenta usar la herramienta Anclar sin éxito]. No…		
121	Juan	O sea, traslada el punto.		
122	Ana	¿El punto [D]?		
123	Juan	Sí.		
124	Ana	Vuelve a ser paralela [paralelogramo].		
125	Juan	Por lo que está cambiando B [relación de dependencia de B a partir de P]		
126	Ana	O sea que no puede ser trapecio.		
	Juan	Pero, ¿por qué? O sea que cuando está 	A	36:27

127		fuera de la circunferencia de centro A ¿qué será? ya ahí sería un [Ana borra la recta paralela]… cuadrilátero sin ningún lado congruente. Sin ángulos congruentes ¿cierto? [Ana asiente con la cabeza] Llévalo lejos [Ana arrastra a D lejos de los otros puntos]. Sí. ¿Será que hay cometa?		E	36:43

Ahora Juan se cuestiona por la posibilidad de obtener un trapecio o cualquier otro tipo de cuadrilátero [117]. Ana inicia a arrastrar al punto D con el fin de ver si se puede obtener un trapecio [Exploración] y cuando parece que en pantalla se ha configurado un cuadrilátero de este tipo, la comprobación de la relación de paralelismo arroja un resultado negativo [118]. Este resultado motiva a Ana a proponer la construcción de una paralela [Planeación], Juan apoya la idea y pide que esta sea paralela al segmento AB y que pase por el punto C. Ana realiza esto [Implementación] y arrastra al punto D hasta que este está sobre la recta paralela. En ese momento, Ella se da cuenta que cuando el punto D está sobre la recta paralela construida, el cuadrilátero se convierte en paralelogramo automáticamente [124] lo que la lleva a considerar que no es posible obtener este cuadrilátero. Juan considera [Análisis] que esto se debe a que el movimiento del punto D influye en la posición del punto B y aunque se cuestionan por los motivos de este resultado, no profundizan en los mismos, descartando esta posibilidad sin mayor análisis y cuestionando la posibilidad de que el cuadrilátero sea cometa [Exploración].

128	Ana	También estaba pensando en eso.		
129	Juan	Pero tiene que estar [D] en r [Ana arrastra el punto D hacia r], ¿no? pareciera. Ah no mentiras.		
130	Ana	Ese punto tiene que estar acá [señala la segunda intersección de las circunferencias con centros en C y P] en la intersección.		
131	Juan	Y no puede haber cometa porque este no, BC no va a ser congruente a BA, porque tendría que estar en r, este B no puede salir de la circunferencia, nunca va a ser congruente BC con BA [explica algo que no es comprensible]; entonces, CD tampoco va a ser congruente a BC, porque como D tiene que estar en este semiplano, entonces no puede estar en la circunferencia [de centro C y radio CB], entonces no puede tener el mismo radio. No puede tener la misma distancia. Entonces no puede ser cometa tampoco. No puede ser cometa ni trapecio.	A	37:36

132	Ana	[Arrastra a D muy cerca de r] Ni ro… ni cuadrado tampoco.			
133	Juan	Ni cuadrados exactamente, por esa misma razón.			
134	Inv	¿Cuál es esa razón?			
135	Juan	Pues como D está en el semiplano donde está A y como B tiene que estar en la circunferencia de centro C, entonces como D nunca puede estar en la circunferencia [centro C], porque si estuviera en la circunferencia, o estaría en la recta r, o estaría en el semiplano donde no está A y no se cumpliría la condición. Entonces DC nunca va a ser congruente a CB y por esta misma razón CB tampoco va a ser congruente a BA, entonces no puedo construir un cuadrilátero que sea cuadrado, ni rombo ni cometa. Por esos tres lados que no pueden ser congruentes, CD, CB y BA. Entonces, al parecer, los únicos cuadriláteros son paralelogramo o rectángulo, que es un paralelogramo, o un cuadrilátero donde ningún segmento es congruente, par de segmentos es congruente. Serían esas…			
136	Ana	Sí.			

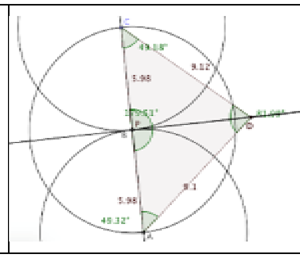
Al considerar esta posibilidad, Juan anticipa que el punto D debe pertenecer a la recta r [129], mientras que Ana considera que D debe pertenecer a la intersección de las circunferencias con centros C y P, al igual que el punto B [130]. Juan se atreve a argumentar [Análisis] que los segmentos BA y BC no pueden ser congruentes debido a la posición del punto B (circunferencia con centro C) [131]. De manera similar, él argumenta que los segmentos BC y CD no pueden ser congruentes, debido a que esto implicaría que D debería pertenecer a la circunferencia de centro C, lo que contradice la condición del punto D en el problema. Con base en esto, Juan asegura que el cuadrilátero no puede ser cometa y Ana complementa, apoyada en los motivos expuestos por Juan, que tampoco podría el cuadrilátero ser rombo o cuadrado. Juan cierra este episodio declarando que las únicas posibilidades del cuadrilátero ABCD son paralelogramo o rectángulo.

137	Juan	Entonces, pues podemos escribir una conjetura, donde se especifique si D está en la circunferencia de centro A, entonces es un paralelogramo y ahí se incluye el caso del rectángulo, que es el caso específico donde se intersecan las circunferencias [de centros P y C]. El otro caso es cuando D no está en la circunferencia, que sería el cuadrilátero donde ningún par de lados es congruente.	S	40:12
138	Ana	Serían tres [conjeturas]…		
139	Juan	No, dos casos no más…		
140	Ana	Ah sí, el paralelogramo y rectángulo.		

141	Juan	Entonces…		
142	Ana	Dado…		
143	Juan	Las condiciones serían que P…		
144	Ana	P es el punto medio de [segmento] CA.		
145	Juan	Donde CA es perpendicular a una recta r. Entonces, [escribe en una hoja] dado P punto medio del segmento CA, CA perpendicular a… Bueno, pero no hemos dicho que P está en r. Dado P que pertenece a r, punto medio de CA y CA perpendicular a la recta r, eh, y D pertenece al semiplano respecto a la recta r donde está A. Entonces, la condición es que B pertenece a la circunferencia de centro C y radio CP. Bueno, si D pertenece a la circunferencia de centro A y radio CP, entonces el cuadrilátero ABCD es paralelogramo. Pues sería una conjetura. La otra sería, [escribe] si D no pertenece a la circunferencia [centro A y radio CP] entonces el cuadrilátero ABCD es, ¿se podría decir escaleno?		
146	Ana	O, se tiene el cuadrilátero ABCD con ningún segmento congruente.		
147	Juan	Entonces, [escribe] cuadrilátero ABCD con ningún par de lados congruentes. Esas son las dos que yo creo que se pueden hacer.		
148	Ana	Sí.		
149	Juan	Entonces yo [lee las conjeturas], entonces, eh ¿justificamos ambas? o podemos justificar una y… [Regresan al enunciado del problema]. [Leen] Elabore conjeturas y justifique estas conjeturas…	L	45:14
150	Ana	Sí, las dos.		

El grupo ahora se compromete en la formulación de una conjetura [Síntesis] y es Juan quien señala dos posibilidades, una referida a la pertenencia del punto D a la circunferencia de centro A para que el cuadrilátero sea un paralelogramo, incluyendo el caso particular donde se obtiene un rectángulo, y otra posibilidad para el punto D, donde este no pertenece a la circunferencia de centro A y el cuadrilátero obtenido no tiene propiedad alguna de congruencia. Ana reacciona a esta propuesta indicando que entonces se establecerían tres conjeturas [138], pero Juan le responde que solo se están considerando dos casos. Ana hace explicito que estos dos casos estarían referidos a los casos donde se obtiene un rectángulo y un paralelogramo, pero Juan no presta atención a este comentario y de acuerdo a lo mencionado líneas atrás por él mismo, los dos casos que él contempla no son los mismos que Ana considera.

Ahora Juana y Ana inician a escribir la conjetura que reporta que el cuadrilátero ABCD es paralelogramo, aunque esta no es del todo verdadera, pues han dejado de lado una condición necesaria declarada en el enunciado del problema. La segunda conjetura reporta aspectos similares a la primera, se distingue de esta al decir que si D no pertenece a la circunferencia de centro A, el cuadrilátero no tiene lados congruentes. Juan duda sobre la necesidad de justificar ambas conjeturas y para ello retoma el enunciado del problema [Lectura], a partir de la lectura de este reconoce que se debe proveer una justificación a ambas conjeturas [149], idea compartida por Ana.

151	Juan	Entonces, ah, pues de esta ya tenemos [segunda conjetura] casi la mitad ya está justificada ¿no? porque ya habíamos dicho que D está… esa ya tenemos… ya la del cuadrilátero con ningún par de lados congruentes ya tenemos justificada porque, ya habíamos dicho que si está en el semiplano donde está A, entonces D nunca va a estar en la circunferencia con centro C y radio CP, por la tanto nunca va a tener la misma distancia de CB, por lo tanto, ni CB ni CD ni BA son congruentes [Ana asiente con la cabeza]. Eh, por esa misma razón, entonces como D no va a estar en la circunferencia con centro A y radio CP, entonces no va a tener la misma distancia de BC, por lo tanto ningún lado va a ser congruente.	A	45:25
152	Ana	Sí.		
153	Juan	Se puede dar el caso en que AD, en que D pueda estar a una distancia en la que se pueda dar que CD congruente a DA ¿no? porque D se puede correr hasta acá [con el mouse señala una posición en pantalla en la que aparentemente se cumple que AD y CD son congruentes].		
154	Inv	¿Qué está pesando Juan?		
155	Juan	Ya justificamos que por lo menos no van a ser congruentes [los lados del cuadrilátero] a CB. No, pero D no puedes pasarlo al otro… [Ana arrastra a D y lo coloca sobre r] entonces vamos a justificar ahora que CD no puede ser congruente a DA.		
156	Ana	Pero mira… [le muestra la pantalla] 		
157	Juan	No, pero no puede estar en r, ¿listo?		
158	Ana	No…		
159	Juan	Entonces, ¿cómo justificamos eso?		
160	Ana	La única manera en que sean congruentes es acá [muestra nuevamente su construcción en pantalla].		
161	Juan	En r, sí. Pero, ¿por qué?		
162	Ana	Tendrían el mismo…		
163	Juan	No, sí. Pero por qué si está en este lado nunca va a ser congruente a, ¿cómo se puede justificar eso?		
164	Ana	Es que, para que sean congruentes esas dos, ahí se forma ya como un triángulo [DCA, apoyada nuevamente en su construcción].		
165	Juan	Sí, pero es que no tenemos que ponerla en r [punto D], tiene que estar en el semiplano…		

		D no puede estar en r porque ya no estaría en el semiplano, ya no se cumpliría la condición. Faltaría ese caso, en el que CD no fuera congruente a AD, porque ya dijimos que por lo menos CB no es congruente a CD ni a BA.		

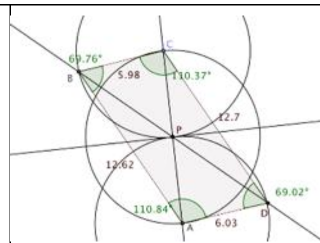
En un primer momento Juan toma la segunda conjetura elaborada [Análisis] dado que sobre esta tenían ya un avance en su justificación. El argumento central yace en que D pertenece a un semiplano y no puede en consecuencia pertenecer a la circunferencia de centro C y radio PC, lo que lleva a que el segmento CB y CD no sean congruentes. Según Juan, algo similar lleva a concluir que los segmentos BC y BA no son congruentes tampoco y de acuerdo a lo dado en la conjetura, se puede decir que los segmentos DA y BC tampoco son congruentes. De esta forma el segmento BC no es congruente a cualquier otro segmento [155], ahora Juan propone justificar que el segmento CD y DA no son congruentes.

Ante esta posibilidad, Ana arrastra al punto D y lo coloca sobre la recta r, donde los segmentos CD y DA serían congruentes y le muestra a Juan dicha configuración. Juan se cuestiona por la forma de justificar que eso no se puede dar y Ana asegura que la única forma de lograr dicha congruencia implica que el punto D pertenezca a la recta r [160]. Los argumentos de Ana recurren a la representación gráfica donde D está sobre la recta r como soporte a la idea que los segmentos CD y DA no pueden ser congruentes. Sin embargo, Juan no valida estos argumentos en cuanto estos no permite justificar que al estar el punto D en un semiplano, los segmentos en mención no son congruentes [157 – 165]. Para él, este es el único caso que faltaría por justificar con el objetivo de brindar un soporte teórico a la conjetura que están analizando.

166	Ana	Faltan los adyacentes… Para que sean congruentes, DB tiene que ser diámetro, pero igual no puede estar sobre la recta [punto D].	A	
167	Juan	Estaba pensando que si se puede hacer como, lo que dice Ana. Listo, ella dice que D esté en r, es la única manera que sean congruentes, entonces, si demostramos eso, pareciera que demostramos el caso contrario, o sea como es la única manera, entonces como ya D está en un semiplano, entonces ya tiene que ser diferente, o sea que de pronto demostrar que la única manera en que sean congruentes es estando en r, demostraría también que CD no es congruente a AD porque ya no está en r, como si fuera una negación. Ponlo [D] en r por favor [Ana arrastra a D y lo deja sobre r]. Cuando está en r ya no es cuadrilátero.		
168	Ana	No.		
169	Juan	Podríamos demostrar que CD es mayor a DA, que siempre se va a tener ese caso. Estaba pensando hacer como la propiedad de la desigualdad triangular [En la hoja escribe CD>CP+PD].		
170	Inv	¿Qué va a hacer Juan?		

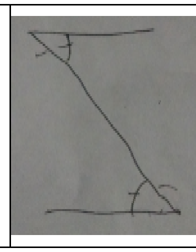
171	Juan	Usar la propiedad de la desigualdad triangular. Entonces como PA es igual a PC, entonces tenemos que [escribe en la hoja AD>CP+PD], pero también tenemos que [escribe CD>AD+2CP]. Sí, por la propiedad de tricotomía sabemos que… pero… [guarda silencio]		
172	Inv	¿Qué piensa Ana?		
173	Ana	Um, no sé.		
174	Juan	Ahora tengo dudas de la propiedad. Porque no tiene que ser mayor a la suma…		
175	Ana	Es que la única manera en que estos sean congruentes es… [nuevamente muestra su construcción en la que D está en la recta r] Pero ya no sería cuadrilátero.		
176	Juan	Uno diría que D no estando ahí, sería… Para que sea un triángulo, tiene que ser. Es que creo que la estoy usando mal. Es al contrario, la suma de los lados tiene que ser mayor siempre al tercer lado ¿sí? ahí sí tiene sentido, entonces, eso se cumple para cualquier triángulo [corrige las desigualdades escritas en la hoja], que la suma de dos lados tiene que ser mayor al tercero [elabora algunos cálculos y operaciones sin éxito alguno].		
177	Inv	¿Qué está haciendo Juan?		
178	Juan	Es que estoy tratando de ver si llegamos a algo contradictorio, asumiendo que CD fuera igual a DA, usando la desigualdad triangular.		
179	Inv	¿Qué piensa Ana?		
180	Ana	No sé, es que acá siempre se forma un ángulo recto [en la construcción que realizó muestra el ángulo CDA], está en la circunferencia. No sé si por ese lado [miran la pantalla y la hoja]. Tal vez si están en la misma recta, estos son colineales ¿no? [B, P y D]		
181	Juan	Sí.		
182	Ana	Y se supone que D no debe estar donde está B ¿sí? No sé cómo explicarlo…		
183	Juan	O sea, que si D está… están en la misma recta. Sí, pero eso no justifica el hecho de que DC sea diferente a AD.		
184	Inv	¿Qué piensan?		
185	Juan	Por este lado no supe cómo justificarlo.		

Juan trata de desarrollar la idea de Ana involucrando un razonamiento apoyado en la estructura lógica de la condicional que ella establece [167], pero al parecer no ve una salida a ese camino y decide involucrar una propiedad geométrica conocida por él [169]. Él inicia a realizar algunos cálculos numéricos con base en la información de la que dispone y Ana manifiesta no comprender lo que él está realizando [173]. Al final, Juan se siente confundido dentro de su propia estrategia y manifiesta no tener seguridad sobre la propiedad involucrada [174]. Ana en todo momento se apoya en la representación realizada en Geogebra donde el punto D está en la recta r, dado que allí el cuadrilátero deja de existir y se convierte en un triángulo [175]. Juan se percata que ha estado involucrando de manera errada la propiedad que en algún momento involucró y la corrige, realizando nuevamente cálculos sin reportar algún éxito [176]. Las ideas que Ana ofrece no convencen a Juan en cuanto esta no permiten justificar la no congruencia de los segmentos, por ello no les da un desarrollo. Al final, tras muchos intentos no afortunados, Juan reconoce no saber cómo justificar la conjetura propuesta.

186	Ana	Tratemos de justificar esta [primera conjetura].	P	1:05:58
187	Juan	¿La del paralelogramo?		
188	Ana	Sí.		
189	Inv	¿Van a mirar la otra?		
190	Juan	Sí. Entonces, ¿qué condición tenemos? que D pertenezca a la circunferencia con centro A radio CP. Entonces, como B está en la circunferencia, también de radio CP, entonces los lados son congruentes. Entonces, como son congruentes y además tenemos que una diagonal es, sí que P es punto medio de CA, entonces tenemos… 	A	1:06:13
191	Ana	Um, digamos, por opuestos por el vértice.		
192	Juan	Sí. Opuestos…		
193	Ana	Interestancia, luego rayos opuestos por el vértice, luego por el hecho geométrico ángulos opuestos por el vértice - congruentes, tenemos que BPC y APD son congruentes. Como ya tenemos lado-lado-ángulo… [señala con el mouse respectivamente BC, CP y BPC]		
194	Juan	¿Cuál lado?		
195	Ana	Este [señala BC], lado [señala PC] y ángulo [BPC].		
196	Juan	Pero ese funciona solo con, cuando el triángulo tiene un ángulo recto, lado-lado-ángulo ¿te acuerdas?		
197	Ana	Sí… ¿No es lado-ángulo-lado?		
198	Juan	No, ese sí.		
199	Ana	Sí.		

El no tener éxito en la justificación de la segunda conjetura lleva a que Ana proponga [Planeación] justificar la otra conjetura, aquella que reporta las condiciones para que se obtenga un paralelogramo [186]. Juan inicia retomando las condiciones con las que cuentan a través de esta conjetura [Análisis] e inicia a establecer algunos hechos geométricos derivados de esta información sin lograr construir una ruta para la justificación [190]. Ana sugiere involucrar ángulos opuestos por el vértice, asegurando que [193] estos son congruentes. En su discurso, ella quiere involucrar un criterio de congruencia para justificar la congruencia de dos triángulos y avanzar en la justificación, pero Juan la hace caer en cuenta de que su razonamiento no es acertado pues está involucrando un hecho geométrico sin que se cumplan todas las condiciones [194 - 199].

200	Inv	¿Qué están buscando?		
201	Juan	Eh,…		
202	Ana	Triángulos congruentes.		
203	Juan	Es que podríamos usar triángulos congruentes para justificar los ángulos opuestos, que sean congruentes y usar el hecho geométrico que si los ángulos opuestos son congruentes, creo que es un hecho bicondicional, donde es paralelogramo si los opuestos son congruentes, sí. O usar ángulos congruentes también para, que sean alternos internos congruentes, entonces son paralelas. Podríamos usar esos dos…		
204	Ana	Acá, CP es congruente con PA ¿sí? y BP también…		
205	Juan	¿Qué?		
206	Ana	Congruente con CB.		
207	Juan	No [Ana arrastra el punto D sobre la circunferencia, su rostro refleja que no está muy convencida de que estos segmentos no sean congruentes. Al final acepta que no lo son].		
208	Ana	Sí. Ah no,… [observan la pantalla por un tiempo]		
209	Juan	No tenemos información de los ángulos y los únicos que podríamos usar son los opuestos por el vértice [observan la pantalla]. Mira, PA, AD tienen la misma distancia.	A	
210	Ana	Sí. Estaba mirando que este [selecciona segmento CP] es congruente con CB.		
211	Juan	Sí, y PA congruente con AD. Entonces son isósceles y… Entonces, este ángulo, el ángulo ADP, por ser isósceles, seria congruente al ángulo APD y también tenemos que PCB es isósceles, entonces el ángulo CBP es congruente al ángulo CPB. Entonces como estos son alternos internos, ADP y DBC son alternos internos y como son congruentes, entonces la recta BC es paralela a la recta DA. Segmento AD paralelo al segmento BC. ¿Sí? Entonces, como ya tenemos que el segmento AD es paralelo al segmento BC, entonces podemos usar, eh, esta [recorre la recta DB] como transversal y justificar que…		
212	Ana	También alternos internos.		
213	Juan	Aquí el ángulo PDC, ¿sí? ¿Es ese?		
214	Ana	Sí. Ese [señala con el mouse a BDC] con este de acá [señala con el mouse a DBA].		
215	Juan	No, no. ¿Se puede usar ese?		
216	Ana	Sí, porque ya hay paralelas.		
2017	Juan	Sí, sí.		
218	Ana	Ya hay paralelas y alternos internos.		

219	Juan	Sí, me refiero a si puedo coger esos dos ángulos, el… yo digo que este con este [en una hoja dibuja dos ángulos alternos internos]			

Para Ana la dificultad yace en determinar triángulos congruentes [202] y es Juan quien explica el motivo de ello [203]. Ella intenta involucrar algunas congruencias entre los lados pero Juan es el encargado de hacerle ver que estas no son ciertas. De repente, ambos reconocen que los triángulos BCP y PAD son isósceles, dadas las congruencias de dos de sus lados, con lo que justifican que los ángulos opuestos a los lados congruentes también son congruentes [211]. Juan se aprovecha de este resultado para justificar que en el cuadrilátero ABCD los segmentos BC y AD son paralelos. Apoyados en este resultado, ambos estudiantes intentan justificar que una pareja de ángulos es congruente, sin embargo, es la duda de Juan la que hace que él se percate de que lo que quieren concluir no es correcto, aunque Ana no se muestre muy convencida de ello y considere que el trabajo realizado es correcto.

220	Ana	¿No es así? [señala otra pareja de ángulos que no son alternos internos]		
221	Juan	No, son estos los que puedo tomar [señala los ángulos alternos internos]. O sea, yo me refiero a… es que ya sabemos que el ángulo ADP es congruente a… lo que podemos usar es que el ángulo PAD es congruente al ángulo PCB por la razón que son alternos internos y están entre paralelas. Entonces ya tenemos que el ángulo PAD es congruente al ángulo PCB, entonces por esa razón tenemos que el triángulo APD y el triángulo PBC son congruentes por lado-ángulo-lado, ¿sí? entonces el segmento PA es congruente a PC y BP congruente a PD. También tenemos ángulos opuestos por el vértice, el ángulo BPA y CPD son opuestos por el vértice, entonces son congruentes y por el criterio de congruencia lado-ángulo-lado, el triángulo BPA es congruente con el triángulo CPD, entonces como son congruentes, el ángulo PAB es congruente al ángulo DCP. Entonces, por ser alternos internos, la recta DC es paralela a la recta BA, por el hecho geométrico ángulos alterno internos congruentes, entonces paralelas. Listo, entonces es un paralelogramo.	A	
222	Ana	Sí.		
223	Juan	Ahora el otro. Cambiemos de conjetura. En el otro, ya demostramos que es un paralelogramo, si pertenece a la circunferencia de centro A. Ahora queremos demostrar, si cuando D no pertenece a la circunferencia, entonces ningún par de lados es congruente. En ese caso ya demostramos que ninguno va a ser congruente al lado BC, nos faltaría demostrar que [Ana señala con el mouse los segmentos DC y DA] por lo menos CD no es congruente a DA, ni CD al opuesto [observan la pantalla por un rato y después abortan el intento de justificarla]. No sé, no se me ocurre nada que… esta conjetura no. Por el momento no sé cómo demostrarla.	P A	1:20:58 1:21:15

224	Ana	No, no. Tampoco.		1:25:29

Al final Juan le explica a su compañera que relaciones de congruencia sí pueden ser consideradas con la información de la que disponen [221]. En su discurso, Juan justifica que los triángulos BCP y PAD son congruentes y con ello concluye que los segmentos BP y PD son también congruentes [221]. Con base en la información que han acopiado, Juan logra establecer la congruencia de una pareja de ángulos, con la que finalmente justifica que los segmentos DC y BA son también paralelos. En consecuencia, según Juan, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo. Habiendo finalizado la justificación de eta conjetura, Juan menciona que deben finalizar la otra conjetura y para ello retoma el progreso que previamente habían construido, sin embargo, al cabo de unos minutos, en los que no pueden obtener un progreso, ambos estudiantes deciden no abordar esta justificación en tanto no saben cómo realizarla. De esta forma finaliza el trabajo realizado por este grupo.